Ejercicios propuestos 5
Matemáticas de la Física 3

1. Encuentre la función de Green causal $\mathcal{G}(x, \xi, t)$ solución al problema

$$\partial_t \mathcal{G} - \partial_x \partial_x \mathcal{G} = \delta(x - \xi)\delta(t), \qquad 0 < x, \xi < \infty, \qquad t > 0;$$

$$\mathcal{G} \equiv 0, \qquad t < \tau;$$

$$\mathcal{G}|_{x=0} \equiv 0, \qquad t > 0.$$

Sugerencia: emplee transformada seno de Fourier e invierta. El resultado es

$$\mathcal{G}(x, \xi, t) = \Theta(t)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left[e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]$$

2. Considere el problema de valores iniciales

$$\partial_t \partial_t u - \partial_x \partial_x u = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \qquad \partial_t u(x, 0) = f_2(x).$$

a) Empleando transformadas de Laplace en la variable t obtenga

$$\tilde{u}(x, s) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-s|x-\xi|}\left[f_1(\xi) + \frac{1}{s}f_2(\xi)\right]$$

b) A continuación, separe la integral de acuerdo a $\xi < x$ o $\xi > x$ y usando el cambio de variable $x - \xi = \pm\tau$ invierta la expresión obtenida en **??**.