Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen Parcial
Tensores y Coordenadas
Noviembre 2004

Nombre____

1. Dado el sistema de coordenadas parabólicas

$$x = \xi\eta\cos\varphi; \qquad y = \xi\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi; \qquad z = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right)$$

Exprese el diferencial de volumen $\mathbf{d}v = \mathbf{d}x\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}z$ en estas coordenadas (3 ptos.)

2. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = a\,|\mathbf{i}\rangle + b\,|\mathbf{j}\rangle\,; \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = c\,|\mathbf{i}\rangle + d\,|\mathbf{j}\rangle$$

(a) Encuentre la expresión para la métrica $\tilde{g}_{ij}$ en estas coordenadas (2 ptos.)

(b) Encuentre la expresión para un vector genérico $\vec{v} = v_x\,|\mathbf{i}\rangle + v_y\,|\mathbf{j}\rangle$ en estas coordenadas (2 ptos.)

(c) Suponga ahora una base y un tensor concreto

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle\,; \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{i}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{j}\rangle\,; \qquad T^i_j = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión matricial para el tensor $\tilde{T}_{ij}$[1] (3 ptos.)

3. Definimos una transformación ortogonal (una transformación de un sistema de coordenadas ortogonales a otro ortogonal también) si se cumple

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial\,\tilde{x}^i}{\partial\,x^k}x^k + a^i; \qquad x^i = \frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}x^k + \tilde{a}^i; \qquad \text{donde}\ \det\left(\frac{\partial\,x^k}{\partial\,\tilde{x}^l}\right) = \det\left(\frac{\partial\,\tilde{x}^k}{\partial\,x^i}\right) = \pm 1$$

con

$$\frac{\partial\,\tilde{x}^k}{\partial\,x^i}\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^l} = \frac{\partial\,x^k}{\partial\,\tilde{x}^i}\frac{\partial\,\tilde{x}^i}{\partial\,x^l} = \delta^k_l$$

(a) Muestre que las transformaciones de Galileo en 2 dimensiones

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^1_{O\tilde{O}}t \\ V^2_{O\tilde{O}}t \end{pmatrix}$$

son transformaciones ortogonales (3 ptos.). Note que $V^1_{O\tilde{O}}$ y $V^2_{O\tilde{O}}$ son las velocidades en la dirección 1 y 2, respectivamente, del observador $\tilde{O}$ con coordenadas $\tilde{x}^i$ respecto al observador O con coordenadas x^i,mientras t es el tiempo medido por ambos observadores.

[1] **Ayuda** dada una mantriz genérica $A^i_j = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$

(b) Las transformaciones de Galileo nos permiten relacionar las posiciones de una partícula respecto a dos observadores los cuales se encuentran en movimiento, uno respecto al otro. Considere entonces el movimiento de una partícula visto desde el sistema de coordenadas x^i tal que

$$x = V_{0x}t; \qquad y = V_{0y}t - g\frac{t^2}{2}$$

Exprese el vector velocidad $\vec{V}$ de esta partícula visto del sistema de coordenadas $\tilde{x}^k$ (2 ptos.)

4. Consideremos este par de tensores provenientes de la teoría de elasticidad

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k \; u_i + \partial_i \; u_k\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \; u_i}{\partial \; x^k} + \frac{\partial \; u_k}{\partial \; x^i}\right); \qquad \left(u^i_k\right)^0 = u^i_k - \frac{1}{3}u^m_m \; \delta^i_k;$$

y construyamos el tensor de esfuerzos como

$$p^i_j = 2\lambda\left(u^i_j\right)^0 + K u^l_l \; \delta^i_j$$

Calcule la energía libre para el medio elástico, definida como $F = \frac{1}{2}p^i_j u^j_i$ (3 ptos.)

5. Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = L^\alpha_\beta \; x^\beta + a^\alpha; \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^k v_k}}; \quad \alpha, \beta = 0,1,2,3; \quad i,j,k = 1,2,3 \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} L^0_0 = \gamma \\ \\ L^i_0 = L^0_i = \gamma v^i \\ \\ L^i_j = L^j_i = \delta^i_j + v^i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^k v_k} \end{array} \right.$$

las L^α_β se denomina impulso (*boost*) de Lorentz donde las v^k son las componentes tridimensionales de la velocidad relativa entre los observadores $\tilde{O}$ y O con coordenadas $\tilde{x}^\alpha$ y x^β, respectivamente. La coordenada x^0 representa el tiempo medido por el observador O mientras que las x^j representan las coordenadas espaciales x, y, z para $i, j = 1,2,3$ respectivamente. Nótese que $0 \leq v^k v_k < 1$. Suponga, por facilidad, que el movimiento es en una dimensión $\alpha, \beta = 0,1$ y $i, j = 1$

(a) Muestre que los tiempos se alargan cuando son medidos por observadores en movimiento (3 ptos.)

(b) Muestre como las distancias se acortan cuando son medidas respecto a observadores en movimiento (3 ptos.)