Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen Parcial
Espacios Vectoriales y vectores cartesianos
Octubre 2004

Nombre____

1. Los vectores en $\Re^3$ en coordenada cartesianas los definimos como $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

$\langle \mathbf{e}^i \| \mathbf{e}_j \rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{\mathtt{k}}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{\mathtt{k}}$	0	0	1

con $i, j = 1, 2, 3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir: $|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^icon $i = 1, 2, 3$ son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0, también números reales, se le llama componente escalar[1]. Los cuaterniones son, por decirlo de alguna manera, híbridos. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como

$\|\mathbf{q}_i\rangle \odot \|\mathbf{q}_j\rangle$	$\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$
$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$	$-\|\mathbf{q}_2\rangle$
$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$-\|\mathbf{q}_3\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$
$\|\mathbf{q}_3\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$-\|\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$

(a) Compruebe si el producto de cuaterniones $|P\rangle = |Q\rangle \odot |R\rangle$ es un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores (2 puntos). Explique por qué.

(b) Suponga ahora que se define un cuaternión conjugado como: $|Q\rangle^{\maltese} = b^0 - b^j |\mathbf{q}_j\rangle$ con $j = 1, 2, 3$ compruebe si

$$\| |Q\rangle \|^2 = |Q\rangle^{\maltese} \odot |Q\rangle$$

representa una buena definición de norma. (3 puntos).

(c) Comprebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|Q\rangle} = \frac{|Q\rangle^{\maltese}}{\| |Q\rangle \|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|Q\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$ (2 puntos)

[1]Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^{3} c^j |\mathbf{q}_j\rangle$. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

2. ¿ Cuál de los siguientes polinomios:

   (a) $x^2 - 2x + 1$;
   (b) $x^4 + 1$;
   (c) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$;

   pertenece al subespacio de $\mathcal{P}$ generado por:
   $|\mathbf{x1}\rangle = x^3 + 2x + 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2 - 2; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^3 + x$; (3 puntos)

3. Considerando $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ como definición de producto interno en el espacio vectorial de polinomios $\mathcal{P}_n$ Encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores: $|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x$ en $\mathcal{P}_3$ (3 puntos)

4. Considerando $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ como definición de producto interior en $\mathcal{P}_n$,

   (a) Los polinomios

   $$|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^2 - 1; \quad |\mathbf{x4}\rangle = \frac{5}{2}x^3;$$

   ¿ Forman una base en $\mathcal{P}_4$? Explique por qué (1 punto)

   (b) ¿ Es una base ortogonal ? Explique por qué Si no lo es, construya una base **ortonormal** a partir de ella (3 puntos)

   (c) Expresar $|\mathbf{p}\rangle = x^2 - x$; o $|\mathbf{q}\rangle = x^3 - 2$ en función de esa base **ortonormal** (3 puntos)

5. Probar la siguiente relación vectorial (3 puntos)

   (a) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{a} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right] \vec{a} + \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{\nabla}\right] \vec{a}$