Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Procesos Estocásticos
Sección 01
Prof. Douglas Rivas

Guía de Estudio del Tema 1. Procesos estocásticos

Con la solución de esta guía se pretende que el estudiante

- Identifique el tipo de espacio paramétrico y espacio de estados de un proceso estocástico.
- Determine la función de densidad de un proceso estocástico.
- Calcule los dos primeros momentos de un proceso estocástico.
- Identificar si un proceso estocástico es estacionario débil

El estudiante previamente debe tener conocimientos sobre

- Definición de un proceso estocástico, espacio paramétrico y espacio de estados.
- Función de densidad de una función de una variable aleatoria.
- El orden de la función de densidad de un proceso estocástico.
- La formula de la esperanza matemática
- Propiedades de algunos procesos estocásticos.

1. Identifique dos ejemplos de procesos estocásticos en cada uno de los siguientes casos
   a) T discreto, E discreto.
   b) T discreto, E continuo.
   c) T continuo, E discreto.
   d) T continuo, E continuo.
2. Se lanza una moneda varias veces. Suponga que cada vez que sale sello un jugador pierde 10 bs y si cae cara gana 5 Bs.
   a) Defina un proceso estocástico que modele la ganancia del jugador. Identifique el espacio del parámetro y el espacio de estados.
   b) Construya una trayectoria para el proceso, tomando $n > 9$. Grafique la trayectoria
   c) Calcule la distribución de X_n, tomando $n > 2$
3. Se lanza un dado varias veces. Suponga que cada vez que sale un numero par un jugador gana 10 bs y si cae impar pierde 5 Bs.
   a) Defina un proceso estocástico que modele la ganancia del jugador. Identifique el espacio del parámetro y el espacio de estados.
   b) Construya una trayectoria para el proceso, tomando $n > 9$. Grafique la trayectoria
   c) Calcule la distribución de X_n, tomando $n > 2$

4. Definamos el proceso estocástico $\{X_t : t > 0\}$ por

$$X_t = e^{-Yt} \qquad t > 0$$

Donde Y es una variable aleatoria que tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Calcule:

   a) La función de densidad de primer orden del proceso $\{X_t : t > 0\}$.
   b) $E[X_t]$ para $t > 0$.
   c) $Cov_X(t, t + s)$

5. Sea $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ un proceso Bernoulli. es decir, las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots$ son independientes y todos tienen distribución Bernoulli con parámetro p. Calcular

   a) La función de masa de probabilidad de l proceso de segundo orden para el caso particular $n_1 = 0, n_2 = 1$.
   b) El coeficiente de correlación $\rho_X(n, m)$ del proceso si $p = 1/2$ y $n, m \in \{1, 2, \cdots\}$

6. Calcular la función de densidad de primer orden del proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ definido por

$$X_t = tY + 1 \qquad t \geq 0$$

Donde Y es una variable aleatoria que se distribuye uniforme en el intervalo $(0, 1)$

7. Definamos el proceso estocástico $\{X_t : t > 0\}$ por

$$X_t = \frac{t}{Y} \qquad t > 0$$

Donde Y tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0, 2)$. Calcule la función de densidad de primer orden para $X > t/2$

8. En el experimento del lanzamiento de una moneda, definimos el proceso X_t como sigue: $X_t = \sin(\pi t)$ si ocurre cara, $X_t = 2t$ si ocurre sello. Hallar

   a) $E[X_t]$
   b) F_{X_t} para $t = 0{,}25$, $t = 0{,}5$ y $t = 1$

9. Considere la oscilación aleatoria $X_t = \cos(2\pi f t + B\phi)$, donde f es una constante real, $\phi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$ y B es una variable aleatoria independiente de ϕ tal que $P(B = 0) = p$ y $P(B = 1) = q$. Hallar $E(X_t)$.

10. A partir de los procesos estocásticos X_t e Y_t incorrelacionados y de media cero, con funciones de autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$ y $R_y(t1, t2)$ respectivamente, se forma el proceso $Z_t = X_t + Y_t$.

    a) Calcular la función de autocorrelación de Z_t
    b) El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?

11. Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias continuas, independientes, de media cero y varianza uno. Sea $\{X_n : n \in N\}$ el proceso estocástico discreto en el tiempo definido por

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ con } n = 1, 2, ...$$

y sea

$$Y_n = X_{n+N} - X_n \text{ con } n \text{ constante}$$

a) Calcular la media y la autocorrelación de X_n

b) ¿Es X_n estacionario en sentido débil?

c) Obtener la función de densidad de primer orden de Y_n suponiendo N grande

12. En un sistema de comunicación se utiliza la siguiente señal aleatoria

$$Y(t) = A\sin(\omega t + \phi) + B$$

donde $\phi \sim U[0, 2\pi]$ y la función de masa del vector aleatorio (A, B) es

$$P(A = a, B = b) = \frac{a}{20} \qquad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, 2, \cdots, a + 1\}$$

Calcular

a) La media del proceso Y_t

b) La autocorrelación del proceso Y_t

c) ¿Es estacionario débil?

13. En un sistema de comunicación se utiliza la siguiente señal aleatoria

$$Y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde $\phi \sim U[-\pi, \pi]$ Calcular

a) La media del proceso Y_t

b) La autocorrelación del proceso Y_t

c) ¿Es estacionario débil?

Respuestas:

1. Son infinitas las respuestas posibles

2. Hay muchas respuestas posibles

3. Hay muchas respuestas posibles

4. *a*) La función de densidad de primer orden del proceso $\{X_t : t > 0\}$ es

$$\boxed{f_{X_t}(x) = \frac{1}{xt} \qquad e^{-t} < x < 1}$$

   b) $E[X_t] = \frac{1-e^{-t}}{t}, \qquad t > 0$

   c) $Cov_X(t, t+s) = \frac{1-e^{-(2t+s)}}{2t+s} - \frac{(1-e^{-t})(1-e^{-(t+s)})}{t(t+s)}$

5. *a*) La función de masa de probabilidad del proceso de segundo orden para el caso particular $n_1 = 0, n_2 = 1$ es

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = p(1-p)}$$

   b) El coeficiente de correlación $\rho_X(n, m)$ del proceso si $p = 1/2$ y $n, m \in \{1, 2, \cdots\}$ es

$$\boxed{\rho_X(n,m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m; \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}}$$

6. La función de densidad de primer orden del proceso $\{X_t : t > 0\}$ es

$$\boxed{f_{X_t}(x) = \frac{1}{t}, \qquad 1 < x < t+1}$$

7. La función de densidad de primer orden para $X > t/2$ es

$$\boxed{f_{X_t}(x) = \frac{t}{2x^2} \qquad \frac{t}{2} < x < \infty}$$

8. *a*) $E[X_t] = t + \frac{1}{2}\sin \pi t$

   b) F_{X_t} para $t = 0{,}25$, $t = 0{,}5$ y $t = 1$ es

$$\begin{aligned} F_{X_t}(t) = F(x,t) = P(X_t \leq x) \quad &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1/2; \\ 1/2, & \text{si } 1/2 \leq x < \sqrt[2]{/2}; \\ 1, & \text{si } x \geq \sqrt{2}/2. \end{cases} \qquad t = 0{,}25 \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1; \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \qquad t = 0{,}5 \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1/2, & \text{si } 0 \leq x < 2; \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \qquad t = 1 \end{aligned}$$

9. $E(X_t) = \cos(2\pi f t)\left[p + \frac{2q}{\pi}\right]$

10. *a*) La función de autocorrelación de Z_t es

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1, t_2)$$

b) No, porque $R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1, t_2)$ depende de t_1 y t_2

11. *a*) La media es $E[X_n] = 0$ la autocorrelación es $R_X(n_1, n_2) = \min\{n_1, n_2\}$

b) No estacionario en sentido débil, porque $R_X(n_1, n_2) = \min\{n_1, n_2\}$, no es una función de $n_2 - n_1$

c) La función de densidad de primer orden de Y_n suponiendo N grande es

$$\boxed{f_{Y_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{N}}}$$

12. *a*) La media del proceso Y_t es $\boxed{E[Y_t] = 9/4}$

b) La autocorrelación del proceso Y_t es $\boxed{R_Y(t, t+s) = \frac{67}{20}\cos(s\omega) + \frac{123}{20}}$

c) Si ya que la $E[Y_t]$ no depende de t y $R_Y(t, t+s)$ depende solo de s.

13. Suerte!!!