CHAPTER 3

PROCESOS DE MARKOV DE TIEMPO CONTINUO

3.1 Introducción

En este capítulo consideramos el análogo en tiempo continuo de las Cadenas de Markov de tiempo discreto. Como en el caso de tiempo discreto, ellas están caracterizadas por la propiedad Markoviana de que dado el estado presente, el futuro es independiente del pasado.

3.2 Cadenas de Markov Tiempo Continuo

Consideremos un proceso estocástico de tiempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ que toma valores en el conjunto de los enteros no negativos. En analogía con la definición de una cadena de Markov de tiempo discreto, dada en el capítulo anterior, decimos que el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es una **cadena de Markov de tiempo continuo** si para todo $s, t \geq 0$, y enteros no negativos $i, j, x(u), 0 \leq u \leq s$

$$P[X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s] = P[X(t+s) = j | X(s) = i]$$

En otras palabras, una cadena de Markov de tiempo continuo es un proceso estocástico que tiene la propiedad Markoviana de que la distribución condicional del estado futuro en el tiempo $t+s$, dado el estado presente s y todos los estados pasados depende solamente del estado presente y es independiente del pasado.

Al igual que el caso discreto, $p_{ij}(t) = P[X(t+s) = j|X(s) = i]$ se conocen como las probabilidades de transición. Si, además, $P[X(t+s) = j|X(s) = i]$ es independiente de s, entonces la cadena de Markov de tiempo continuo se dice tener probabilidades de transición estacionarias u homogéneas. Todas las cadenas de Markov que consideramos serán asumidas a tener probabilidades de transición estacionaria.
Suponga que una cadena de Markov de tiempo continuo entra en el estado i en algún tiempo, digamos en el tiempo 0, y suponga que el proceso no deja el estado i (eso es no ocurre ninguna transición) durante las próximas s unidades de tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso no deje el estado i durante las siguientes t unidades de tiempo?. Para responder esto note que como el proceso esta en el estado i en el tiempo s, se sigue , por la propiedad Markoviana, que la probabilidad de que permanezca en ese estado durante el intervalo $[s, s+t]$ es justo la probabilidad no condicional de que este permanezca en el estado i para al menos t unidades de tiempo. Es decir, si denotamos como τ_i la cantidad de tiempo que el proceso permanece en el estado i antes de hacer una transición a un estado diferente, entonces

$$P[\tau_i > s+t|\tau_i > s] = P[\tau_i > t]$$

para todo $s, t \geq 0$. Por lo tanto, la variable aleatoria continua τ_i , posee la propiedad de pérdida de memoria, y por lo que se ha visto en cursos de probabilidades solamente la distribución exponencial posee esta propiedad. Por lo tanto concluimos que τ_i, tiene distribución exponencial, con parámetro λ_i, el cual, por lo general, depende del estado i.

Además, la propiedad de Markov también implica que el próximo estado visitado, j, es independiente de τ_i. Así, cuando el proceso deja el estado i, este entra al estado j $(\neq i)$ con probabilidad p_{ij} (por definición), donde

$$p_{ii} = 0 \, \forall i \qquad y \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \, \forall i$$

De hecho, lo anterior nos da una manera de construir una cadena de Markov de tiempo continuo. Ya que una cadena de Markov de tiempo continuo es un proceso estocástico que tiene las propiedades de que cada vez que entra en un estado i

(i) la cantidad de tiempo que permanece en ese estado antes de hacer una transición a un estado diferente se distribuye exponencial con parámetro λ_i, y

(ii) cuando el proceso deja el estado i, este entrará al estado j con alguna probabilidad, llamemosla p_{ij}, donde $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$

El proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es llamado una cadena de Markov de tiempo continuo, el cual se define formalmente como

Definición 3.1 *Sea* $\{X(t), t \geq 0\}$ *un proceso estocástico de tiempo continuo cuyo espacio de estado es* $S = \{0, 1, ...\}$. *Decimos que* $\{X(t), t \geq 0\}$ *es una cadena de Markov de tiempo continuo si*

$$P[X(t+s) = j|X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s] = P[X(t+s) = j|X(s) = i] = p_{ij}(t)$$

$\forall \, s, t \geq 0$ *y* $\forall \, i, j, x(u) \in S$.

Nota: Por lo general, no es fácil calcular $p_{ij}(t)$ explicitamente. Más adelante veremos unos teorema que nos proveen unas ecuaciones diferenciales cuya solución son los $p_{ij}(t)$. Un estado i para el cual $\lambda_i = \infty$ es llamado un *estado instantáneo* ya que cuando entra en el instantáneamente lo deja. Aunque tales estados son teóricamente posibles, asumiremos que $0 \leq \lambda_i \leq \infty$ para todo i. (Si $\lambda_i = 0$, entonces el estado i es llamado absorbente ya que una vez entrado en el nunca se sale). Por lo tanto, para nuestros propósitos una cadena de Markov de tiempo continuo es un proceso estocástico que se mueve de estado a estado en concordancia con una cadena de Markov de tiempo discreto, pero de manera que la cantidad de tiempo que permanezca en cada estado, antes de proceder al próximo estado, se distribuye exponencial. Además, la cantidad de tiempo que el proceso permanece en el estado i, y el próximo estado sea visitado, deben ser variables aleatorias independientes. Ya que si el próximo estado visitado fuese dependiente de τ_i, entonces la información en cuanto al tiempo que el proceso haya permanecido en el estado i debe ser relevante para la predicción del próximo estado - y esto contradice el supuesto Markoviano.

3.2.1 Procesos de Nacimiento y Muerte

El número de individuos de una determinada colectividad en un cierto momento t constituye el rango de una variable aleatoria X_t. La variación de dicho número se debe a dos causas; la primera de las cuales es que haya incorporación (nacimientos) de nuevos individuos a la colectividad y la segunda a que haya desincorporación de individuos (muerte). Por tanto, este numero representa un proceso estocástico de parámetro continuo (momentos diferentes de tiempo en que se observa o se considera el número de individuos que componen la colectividad) y de espacio de estado discreto (número de individuos que integran dicha colectividad).

Representando por $E_0, E_1, ..., E_n$ los diferentes estados del proceso se tiene que a un determinado estado, E_n, se puede llegar solo desde dos estados inmediatos, E_{n-1}, y, E_{n+1}; esto es, para un intervalo de tiempo pequeño Δt, solo se produce una incorporación o una desincorporación o ninguna de ambas.
Si se representa por λ_n el promedio de individuos que se incorporan al sistema en la unidad de tiempo cuando éste está en el estado E_n; y,. por μ_n el promedio de desincorporación en la misma situación anterior, se tiene que

$$P[X_{t+\Delta t} = n+1 | X_t = n] = \lambda_n \Delta t + o_1(\Delta)$$

por otro lado

$$P[X_{t+\Delta t} = n-1 | X_t = n] = \mu_n \Delta t + o_1(\Delta)$$

es la probabilidad de que estando en el estado E_n en el momento t, este en el estado E_{n-1} en el momento $t + \Delta t$ (Haya una desincorporación).

Representando por $P_n(t + \Delta t)$ la probabilidad de que el proceso esté en el estado E_n en el momento $t + \Delta t$, se tiene que esta probabilidad es igual a la probabilidad de que esté en dicho estado en el momento t y no haya cambios en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ mas la probabilidad de que esté en el momento t en el estado E_{n-1} y haya una incorporación durante el intervalo $[t, t + \Delta t]$, mas la probabilidad de que esté en el estado E_{n+1} en el momento t y haya una desincorporación durante dicho intervalo $[t, t + \Delta t]$.

$$\begin{aligned}
P(X_{t+\Delta t}) &= P(X_t = n)[1-(\lambda_n\Delta t + o_1(\Delta t))][1-(\mu_n\Delta t + o_2(\Delta t))] \\
&\quad P(X_t = n-1)[\lambda_n\Delta t + o_1(\Delta t)] + P(X_t = n+1)[\mu_n\Delta t + o_2(\Delta t)]
\end{aligned}$$

Reescribiendo en la notación usada

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)[1-(\lambda_n\Delta t + o_1(\Delta t))][1-(\mu_n\Delta t + o_2(\Delta t))] \\
&\quad P_{n-1}(t)[\lambda_n\Delta t + o_1(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu_n\Delta t + o_2(\Delta t)] \\
&= P_n(t)[1-\mu_n\Delta t - o_2(\Delta t) - \lambda_n\Delta t + \lambda_n\mu_n(\Delta t)^2 + \lambda_n\Delta t o_2(\Delta t) \\
&\quad -o_1(\Delta t) + \mu_n\Delta t o_1(\Delta t) + o_1(\Delta t)o_2(\Delta t)] + P_{n-1}(t)\lambda_n\Delta t \\
&\quad +P_{n-1}(t)o_1(\Delta t) + P_{n+1}(t)\mu_n\Delta t + P_{n+1}(t)o_2(\Delta t) \\
&= P_n(t) - P_n(t)\mu_n\Delta t - P_n(t)o_2(\Delta t) - P_n(t)\lambda_n\Delta t + P_n(t)\lambda_n\mu_n(\Delta t)^2 \\
&\quad +P_n(t)\lambda_n\Delta t o_2(\Delta t) - P_n(t)o_1(\Delta t) + P_n(t)\mu_n\Delta t o_1(\Delta t)] \\
&\quad +P_n(t)o_1(\Delta t)o_2(\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_n\Delta t + P_{n-1}(t)o_1(\Delta t) \\
&\quad +P_{n+1}(t)\mu_n\Delta t + P_{n+1}(t)o_2(\Delta t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) - P_n(t) &= -P_n(t)\mu_n\Delta t - P_n(t)o_2(\Delta t) - P_n(t)\lambda_n\Delta t + P_n(t)\lambda_n\mu_n(\Delta t)^2 \\
&\quad +P_n(t)\lambda_n\Delta t o_2(\Delta t) - P_n(t)o_1(\Delta t) + P_n(t)\mu_n\Delta t o_1(\Delta t) \\
&\quad +P_n(t)o_1(\Delta t)o_2(\Delta t)] + P_{n-1}(t)\lambda_n\Delta t + P_{n-1}(t)o_1(\Delta t) \\
&\quad +P_{n+1}(t)\mu_n\Delta t + P_{n+1}(t)o_2(\Delta t)
\end{aligned}$$

Dividiendo por Δt

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t)\mu_n - P_n(t)\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} - P_n(t)\lambda_n + P_n(t)\lambda_n\mu_n(\Delta t) \\
&\quad +P_n(t)\lambda_n o_2(\Delta t) - P_n(t)\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} + P_n(t)\mu_n o_1(\Delta t) \\
&\quad +P_n(t)\frac{o_1(\Delta t)o_2(\Delta t)}{\Delta t}] + P_{n-1}(t)\lambda_n + P_{n-1}(t)\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} \\
&\quad +P_{n+1}(t)\mu_n + P_{n+1}(t)\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Aplicando $\lim_{\Delta t \to 0}$ se tiene

$$P'_n(t) = -\mu_n P_n(t) - \lambda_n P_n(t) + \lambda_n P_{n-1}(t) + \mu_n P_{n+1}(t) \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) es una ecuación diferencial cuya integración debe hacerse por recurrencia.

Supongamos que queremos hallar $P(X_{t+\Delta t} = 0)$, es decir la probabilidad de que el proceso este en el estado E_0 en el momento $t + \Delta t$. En este caso se tiene que dicha probabilidad es igual a la probabilidad de que este en dicho estado en t y no hayan cambios durante el intervalo $[t, t + \Delta t]$, mas la probabilidad de que estando en el E_1 en el momento t se produzca una desincorporación en el intervalo $[t, t + \Delta t]$.

$$\begin{aligned} P(X_{t+\Delta t} = 0) &= P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-(\lambda_0 \Delta t + o_1(\Delta t))] \\ &\quad + P_1(t)[\mu_1 \Delta t + o_2(\Delta t)] \\ &= P_0(t) - P_0(t)\lambda_0 \Delta t - P_0(t) o_1(\Delta t) + P_1(t)\mu_1 \Delta t + P_1(t) o_2(\Delta t) \end{aligned}$$

Entonces

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\lambda_0 \Delta t - P_0(t) o_1(\Delta t) + P_1(t)\mu_1 \Delta t + P_1(t) o_2(\Delta t)$$

Dividiendo por Δt

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\lambda_0 - P_0(t)\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} + P_1(t)\mu_1 + P_1(t)\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t}$$

Aplicando limite

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \tag{3.2}$$

Por lo tanto, el proceso queda caracterizado por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= -\mu_n P_n(t) - \lambda_n P_n(t) + \lambda_n P_{n-1}(t) + \mu_n P_{n+1}(t) \\ P_0'(t) &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \end{aligned}$$

La integración de estas dos ecuaciones diferenciales no es sencilla para expresiones diferentes de λ_n y μ_n. A continuación se obtienen expresiones diferentes de (3.1) y (3.2) cuya integración resulta más sencilla.

3.2.2 Proceso de Nacimiento y Muerte cuando $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n\mu$

En el proceso de nacimiento y muerte no es una restricción exigente al considerar que $\lambda_n = \lambda$, ya que λ representa la integración al colectivo de, a lo sumo, un individuo en el intervalo $[t, t+\Delta t]$. Por tanto, para un colectivo de n individuos en un momento determinado, se puede elegir a δt con esta condición.

En lo que respecta a la desincorporación la relación $\mu_n = n\mu$, donde μ es una constante, parece razonable, ya que suponer a μ_n constante haría que el colectivo creciera indefinidamente. Por tanto, considerando estas dos relaciones en (3.1) y (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= -n\mu P_n(t) - \lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) && (3.3) \\ P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) && (3.4) \end{aligned}$$

La integración de estas 2 ecuaciones diferenciales es mas sencilla que en el caso general. Para la solución en este caso vamos a usar la función generatriz de probabilidad del proceso, esto es,

$$G(t,s) = E(S^t) = \sum_{r=0}^{\infty} P(X_t = r)s^r = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r$$

Derivando $G(t,s)$ con respecto a t y s se tiene

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r'(t)s^r$$
$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial s} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1}$$

De la ecuación (3.3) se tiene que

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

De la ecuación (3.3)se tiene que

Para $n = 1 \Rightarrow P_1'(t) = -\lambda P_1(t) - \mu P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t)$

Para $n = 2 \Rightarrow P_2'(t) = -\lambda P_2(t) - 2\mu P_2(t) + \lambda P_1(t) + 3\mu P_3(t)$

Para $n = 3 \Rightarrow P_3'(t) = -\lambda P_3(t) - 3\mu P_3(t) + \lambda P_2(t) + 4\mu P_4(t)$

$\vdots$

Para $n-1 \Rightarrow P_{n-1}'(t) = -\lambda P_{n-1}(t) - (n-1)\mu P_{n-1}(t) + \lambda P_{n-2}(t) + n\mu P_n(t)$

Para $n \Rightarrow P_n'(t) = -\lambda P_n(t) - n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t)$

Multiplicando cada ecuación por s^n se obtiene

Para $n = 0 \Rightarrow P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$

Para $n = 1 \Rightarrow P_1'(t)s = -\lambda P_1(t)s - \mu P_1(t)s + \lambda P_0(t)s + 2\mu P_2(t)s$

Para $n = 2 \Rightarrow P_2'(t)s^2 = -\lambda P_2(t)s^2 - 2\mu P_2(t)s^2 + \lambda P_1(t)s^2 + 3\mu P_3(t)s^2$

Para $n = 3 \Rightarrow P_3'(t)s^3 = -\lambda P_3(t)s^3 - 3\mu P_3(t)s^3 + \lambda P_2(t)s^3 + 4\mu P_4(t)s^3$

$\vdots$

Para $n-1 \Rightarrow P_{n-1}'(t)s^{n-1} = -\lambda P_{n-1}(t)s^{n-1} - (n-1)\mu P_{n-1}(t)s^{n-1} + \lambda P_{n-2}(t)s^{n-1} + n\mu P_n(t)s^{n-1}$

Para $n \Rightarrow P_n'(t)s^n = -\lambda P_n(t)s^n - n\mu P_n(t)s^n + \lambda P_{n-1}(t)s^n + (n+1)\mu P_{n+1}(t)s^n$

Sumando

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} P_r'(t)s^r &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) - \lambda P_1(t)s - \mu P_1(t)s + \lambda P_0(t)s + 2\mu P_2(t)s \\
&\quad -\lambda P_2(t)s^2 - 2\mu P_2(t)s^2 + \lambda P_1(t)s^2 + 3\mu P_3(t)s^2 - \lambda P_3(t)s^3 - 3\mu P_3(t)s^3 \\
&\quad +\lambda P_2(t)s^3 + 4\mu P_4(t)s^3 + ... - \lambda P_n(t)s^n - n\mu P_n(t)s^n + \lambda P_{n-1}(t)s^n \\
&\quad +(n+1)\mu P_{n+1}(t)s^n + ... \\
&= -\lambda \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r + \mu P_1(t) - \mu \sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)rs^r + \mu \sum_{r=2}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1} + \lambda \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^{r+1} \\
&= -\lambda \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r + [\mu P_1(t) + \mu \sum_{r=2}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1}] - \mu \sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)rs^r + \lambda \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^{r+1} \\
&= -\lambda \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r + \mu \sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1} - \mu s \sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1} + \lambda s \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r'(t)s^r = -\lambda(1-s)\sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r + \mu(1-s)\sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1} \tag{3.5}$$

Como $G(t,s) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r$, $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r'(t)s^r$ y $\frac{\partial G(t,s)}{\partial s} \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)rs^{r-1}$

Entonces

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = -\lambda(1-s)G(t,s) + \mu(1-s)\frac{\partial G(t,s)}{\partial s}$$

Así

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - \mu(1-s)\frac{\partial G(t,s)}{\partial s} + \lambda(1-s)G(t,s) = 0$$

La cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales, lineal completa. El sistema adjunto de esta ecuación es

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds}{-\mu(1-s)} = \frac{dG}{-\lambda(1-s)G}$$

De este sistema se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds}{-\mu(1-s)} \Rightarrow -\mu dt = \frac{ds}{1-s} \Rightarrow \mu dt = -\frac{ds}{1-s} \tag{3.6}$$

y

$$\frac{ds}{-\mu(1-s)} = \frac{dG}{-\lambda(1-s)G} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu}ds = \frac{dG}{G} \tag{3.7}$$

Integrando la ecuación (3.6) se obtiene

$$\mu\int dt = -\int \frac{ds}{1-s} \Rightarrow \mu t = \ln(1-s) + k_1 = \ln[(1-s)k_1']$$

Por lo tanto

$$e^{\mu t} = (1-s)k_1' \tag{3.8}$$

Integrando la ecuación (3.7) se obtiene

$$\frac{\lambda}{\mu}\int ds = \int \frac{dG}{G} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu}s = \ln G + k_2 = \ln(Gk_2')$$

Por lo tanto

$$e^{\frac{\lambda}{\mu}s} = Gk_2' \tag{3.9}$$

Para hallar los valores de k_1' y k_2' consideramos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} P(X_0 = 0) &= P_0(0) = 1 \\ P(X_0 = j) &= P_j(0) = 0, j = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

Recordando que

$$G = G(s,t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)s^r = P_0(t)s^0 + P_1(t)s^1 + P_2(t)s^2 + ... + P_n(t)s^n$$

sustituyendo $t = 0$ se tiene que

$$G(s, 0) = P_0(0)s^0 + P_1(0)s^1 + P_2(0)s^2 + ... + P_n(0)s^n = 1$$

y las ecuaciones (3.8) y (3.9) quedan como

$$e^{\mu 0} = (1-s)k_1' \Rightarrow k_1' = \frac{1}{1-s} \tag{3.10}$$

y

$$e^{\frac{\lambda}{\mu}s} = k_2' \Rightarrow k_2' = e^{\frac{\lambda}{\mu}s} \tag{3.11}$$

Despejando s de la ecuación (3.10) se tiene que

$$s = 1 - \frac{1}{k_1'} \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11) se obtiene a k_2' en función de k_1'

$$k_2' = e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-\frac{1}{k_1'})} \tag{3.13}$$

Ahora bien, sustituyendo k_2' en la ecuación (3.9) se tiene que

$$e^{\frac{\lambda}{\mu}s} = G(t,s)e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-\frac{1}{k_1'})} \tag{3.14}$$

y como de la ecuación (3.8) $k_1' = \frac{e^{\mu t}}{1-s}$, entonces

$$G(t,s) = e^{\frac{\lambda}{\mu}s}e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-\frac{1}{\frac{e^{\mu t}}{1-s}})} \tag{3.15}$$

Simplificando

$$G(t,s) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(1-e^{-\mu t})} \tag{3.16}$$

Recordemos que la función generatriz de la distribución Poisson con parámetro α es

$$G(s) = e^{-\alpha(1-s)}$$

Por lo tanto, el proceso de nacimiento y muerte es un proceso Poisson con parámetro $\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(1-e^{-\mu t})$, es decir

$$P_n(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(1-e^{-\mu t})}[\frac{\lambda}{\mu}(1-s)(1-e^{-\mu t})]^n}{n!}$$

Si consideramos el caso cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = \frac{e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

es decir un proceso Poisson con parámetro λ/μ.

3.2.3 Proceso de Nacimiento y Muerte en Regimen Permanente

En el proceso de Nacimiento y muerte puede considerarse el supuesto de que dicho proceso no depende de t, esto es, la probabilidad de que el proceso este en un determinado estado en un momento cualquiera no depende del tiempo, es decir, del momento, por lo que solamente interviene el estado del proceso. En este caso se dice que el proceso está en regimen permanente y se puede escribir que

$$P_n(t) = P(X_t = n) = P(X = n) = P_n$$

Bajo este supuesto las ecuaciones diferenciales (3.3) y (3.4)

$$\begin{aligned} -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) &= 0 \qquad (3.17) \\ -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) &= 0 \qquad (3.18) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.17) y (3.18) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) &= 0 \qquad (3.19) \\ -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2 &= 0 \qquad (3.20) \\ -(\lambda + 2\mu)P_2 + \lambda P_1 + 3\mu P_3 &= 0 \qquad (3.21) \\ -(\lambda + 3\mu)P_3 + \lambda P_2 + 4\mu P_4 &= 0 \qquad (3.22) \\ &\vdots \\ -(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} &= 0 \qquad (3.23) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \\ P_3 &= \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \end{aligned}$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = 1$, así $P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 1$, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = e^{\lambda/\mu}$ se tiene que $P_0 e^{\lambda/\mu} = 1$ lo cual implica que

$$P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

Por lo tanto

$$P_n = \frac{e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

Así, el proceso de nacimiento y muerte en regimen permanente (independiente del tiempo) es un proceso Poisson con parámetro λ/μ.

3.2.4 Función Generatriz de Probabilidad

Definición 3.2 *Sea X una variable aleatoria que asume valores 0,1,2,...; considere*

$$p_j \quad = \quad P(X = j), \forall j = 0, 1, 2, ...$$

Definamos la función generatriz asociada a $\{p_j\}$ como

$$P(s) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j s^j = E[s^j]$$

Si $s = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} p_j = 1$

Existen 5 principales usos de las funciones generatrices:

1. Generar funciones de ayuda en el cálculo de la función de masa de probabilidad de una suma de variables aleatorias enteras no negativas independientes.

2. Generar funciones de ayuda en el cálculo de los momentos.

3. Usando el teorema de continuidad, generar funciones de ayuda en el calculo de distribuciones límites.

4. Generar funciones de ayuda en la solución de ecuaciones diferenciales o recursiones. La técnica de la función generatriz convierte el problema de resolver una recursión en un problema de resolver una ecuación diferencial.

5. Generar funciones de ayuda en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Es aplicado frecuentemente en la teoría de cadenas de Markov de tiempo continuo.

EJEMPLO 3.1

Sea X una variable aleatoria con distribución $Bin(j; n, p)$. La función generatriz está dada por

$$\begin{aligned} P(s) &= E[s^j] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} s^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (ps)^j (1-p)^{n-j} \\ &= (1 - p + ps)^n = (q + ps)^n \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2

Sea X una variable aleatoria con distribución $Poisson(\lambda)$. La función generatriz está dada por

$$\begin{aligned}
P(s) &= E[s^j] = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda s)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{-\lambda(1-s)}
\end{aligned}$$