UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN Y CONTADURIA PÚBLICA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
# (láminas ilustrativas de clases)

**Prof. Dr. Francisco Antonio García**

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
## Bibliografía Básica

- Investigación de Operaciones Hillier y Lieberman.
- Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. F. J. Gould y otros.
- Investigación de Operaciones. Wayne Winston.
- Investigación de Operaciones. Handy Taha.
- Métodos Cuantitativos para los Negocios. Barry Render y otros (libro texto)
- Métodos Cuantitativos para Administración. Frederick Hiller y otros. (libro texto)

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Estrategias Metodológicas de Evaluación

- Se realizarán tres (3) pruebas presénciales que aportarán un tercio del total necesario para la aprobación de la asignatura.
- Al final se realizará un examen diferido-recuperativo con toda la materia pero la cual eliminaría la peor nota obtenida en uno de los parciales.
- Igualmente se asignaran tareas computacionales en el transcurso del curso (bien resueltas), las cuales si bien no presentan carga aprobatoria, servirán para verificar el grado de responsabilidad estudiante y complementarán su escolaridad, es decir el estudiante que asista invictamente ganará un punto adicional sobre el promedio obtenido en su calificación definitiva condicionado a la entrega oportuna de sus tareas y la puntualidad. Del mismo modo, tendrá derecho a presentar diferido-recuperativo, sólo los estudiantes que hayan sido responsables con la entrega oportuna de este tipo de labores.
- La asistencia a clases es estrictamente obligatoria según las condiciones de escolaridad exigidos en la norma de nuestra universidad. Pero la persona que asista al 100% de sus clases y sea puntual, tendrá la oportunidad de obtener un punto adicional sobre su promedio final.
- Para obtener el punto de asistencia es menester asistir a todas las clases y no hay justificación por enfermedad o algún tipo de inconveniente (a menos que sea por disturbios). Al fin y al cabo es un beneficio que se otorga a los que lo puedan lograr.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
# Tema I
## Investigación de Operaciones, Resolución de Problemas y Toma de Decisiones

- Investigación de Operaciones y/o Administración Científica: origen, importancia, áreas funcionales de aplicación y casos exitosos. Modelos: concepto, construcción y tipología.

- Resolución de problemas organizacionales: concepto de problema, clasificación de los problemas (énfasis en los determinísticos, probabilísticos e incertidumbre), elementos y etapas en la resolución de un problema. Metodología para análisis situacional, análisis del problema actual y análisis de problemas potenciales.

- Toma de decisiones: concepto, orígenes, disciplinas que la estudian, pioneros en el ámbito privado y público. Enfoques teóricos, elementos y proceso de toma de decisiones.

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

**LA GESTIÓN DE TOMA DE DECISIONES**

Un administrador puede incrementar la toma de decisiones aprendiendo más sobre metodología cuantitativa y comprendiendo mejor su contribución al proceso de toma de decisiones. Aquel administrador que se familiarice con los procedimientos cuantitativos de toma de decisiones estará en mucha mejor posición para comparar y evaluar las fuentes cualitativas y cuantitativas, y finalmente de combinar ambas, a fin de tomar la mejor decisión posible.

## Métodos Cuantitativos para la Gerencia

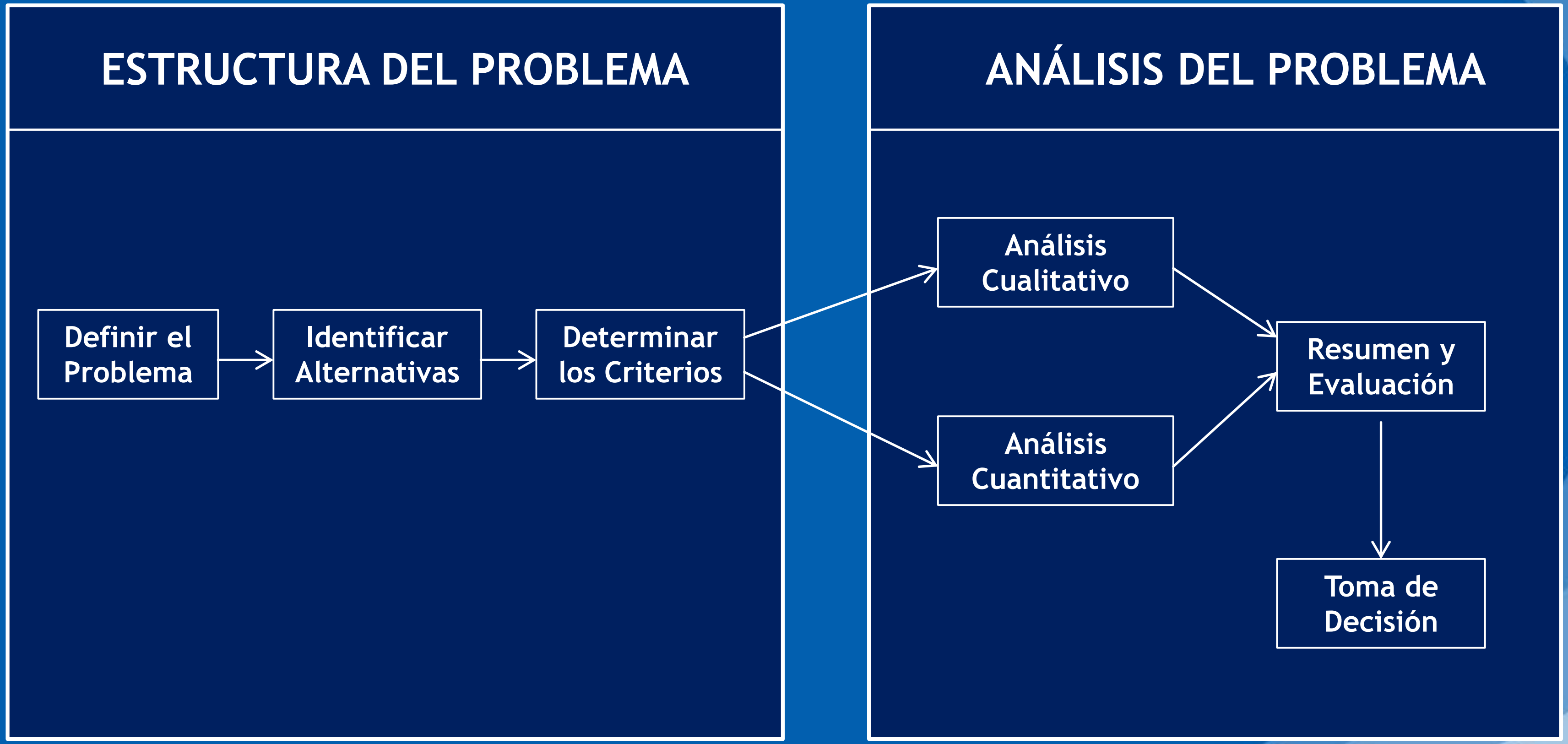
### LA GESTIÓN DE TOMA DE DECISIONES

La revolución de la Administración Científica que inició Frederick W. Taylor, a principios del siglo pasado, puso las bases para el uso del los métodos cuantitativos en la administración, pero se considera que el uso de los métodos cuantitativos se originó a mediados de los cuarenta, cuando se formaron grupos para resolver problemas mediante métodos científicos. Años más tarde, gran parte de estos equipos multidisciplinarios continuaron investigando procedimientos cuantitativos para la TOMA DE DECISIONES.

Tres hechos llevaron al desarrollo y uso de los métodos cuantitativos:

- Descubrimiento por parte de George Dantzing en 1947 del método simplex para la resolución de problemas de programación lineal.
- Publicación del primer libro sobre Investigación de Operaciones en el año 1957 por parte de Churchman, Ackoff, y Arnoff.
- Desarrollo del procesador electrónico.

# METODOS CUANTITATIVOS PARA LA GERENCIA
## Rol del Análisis Cuantitativo y Cualitativo



Métodos Cuantitativos para la Gerencia

**LA GESTIÓN DE TOMA DE DECISIONES**

El análisis cualitativo se basa principalmente en el juicio del administrador; incluye la “intuición” del administrador en relación con el problema. Si el administrador ha tenido experiencia en problemas similares, o si el problema es relativamente simple, se puede poner mucho énfasis en el análisis cualitativo.

Sin embargo, si el administrador ha tenido poco experiencia en problemas similares, o si el problema es lo suficientemente complejo, entonces un análisis cuantitativo puede resultar de especial importancia en la decisión final del administrador. Las habilidades en el procedimiento cuantitativo sólo pueden aprenderse mediante el estudio y el uso de los métodos cuantitativos. El analista se concentra en los hechos o los datos cuantitativos asociados con el problema y desarrollará expresiones matemáticas que describan los objetivos, los límites y otras relaciones que existen dentro del problema, para así recomendar un curso de acción

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Tipos de decisiones por su importancia

- Decisiones estratégicas: Son aquellas que afectan a toda la empresa (o a una buena parte de la misma) durante un largo periodo de tiempo. Influyen, por lo tanto, en los objetivos generales de la empresa y en su modelo de negocio . Son tomadas por los máximos responsables de las compañías.

- Decisiones tácticas : Afectan únicamente a parte de la empresa, o a parte de sus procesos, y generalmente se toman desde un solo departamento. Tienen un impacto relevante a medio plazo, y son tomadas por cargos intermedios.

- Decisiones operativas: Afectan a actividades específicas, con un alcance muy claro, y su efecto es inmediato o muy limitado en el tiempo. Estas decisiones son responsabilidad de los niveles bajos de la jerarquía empresarial.

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Clasificación de las decisiones

Los procesos de decisión se clasifican de acuerdo según el grado de conocimiento que se tenga sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final (esto es lo que se conoce como ambiente o contexto).

Así, se dirá que: •

- El ambiente es de certidumbre cuando se conoce con certeza su estado, es decir, cada acción conduce invariablemente a un resultado bien definido.
- El ambiente de riesgo cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que puede asignarse una distribución de probabilidad conocida.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Clasificación de las decisiones

- El ambiente es de incertidumbre cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que no puede asignarse una distribución de probabilidad, bien porque sea desconocida o porque no tenga sentido hablar de ella[1].

Concretamente las decisiones a ser tomadas según el mejor criterio se llevan a cabo bajo certidumbre, bajo riesgo o bajo incertidumbre.

1Introducciòn a la Teoría de la Decisión. Disponible en: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0191-03/intro.htm. Fecha de consulta 22/11/15.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Métodos Cuantitativos más usados

1. Programación Lineal
2. Programación Lineal Entera
3. Gerencia de Proyectos (PERT-CPM)
4. Modelos de Inventarios
5. Modelos de Líneas de Espera (colas)
6. Simulación por Computadora
7. Análisis de Decisiones
8. Pronósticos
9. Teoría de Juegos

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
## Tema II
## Programación Lineal y no Lineal

- Introducción y fundamentos de la programación lineal: Método gráfico para dos variables de decisión.
- Algoritmo simplex primal: Problema estándar de programación lineal (maximización), variables de holgura, degeneración, soluciones no acotadas, soluciones optimas múltiples. Variables artificiales, minimización. Método de penalización (M). El problema Dual. Aplicaciones en problemas de producción, transporte y dieta.
- Análisis de los resultados alcanzados con software de optimización. Resultados de las variables de decisión, beneficios o costos reducidos, limites superiores o inferiores. Recursos utilizados o requerimientos cumplidos, superávit o déficit, precios sombra. Análisis de sensibilidad (coeficientes de función objetivo, coeficientes tecnológicos y/o recursos).
- Optimización de enteros: aplicaciones con variables de decisión todas enteras (TE), algunas enteras (AE), binarias (0-1) o mixtas.
- Aplicación de programación lineal en problemas de asignación, de redes, de planificación de la producción, de inventarios, de planeación financiera, de inversión, de marketing, de talento humano, de viajeros y de equipaje o mochila.
- Programación lineal con objetivos múltiples.
- Optimización no lineal: aplicaciones en selección de cartera y control de inventarios.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
# Tema II
## Programación Lineal y no Lineal

**Programación Lineal.** La PL puede definirse como una técnica matemática que determina la mejor asignación de los recursos limitados optimizando (maximizando o minimizando) un objetivo. El término lineal se refiere a que todas las ecuaciones matemáticas, que representan tanto las restricciones en los recursos como en el objetivo a optimizar, deben ser lineales.

Planteamiento del problema. Desde el punto de vista matemático, el enunciado completo de un problema de programación lineal considera:

1. Un conjunto de inecuaciones lineales simultaneas que representan condiciones o restricciones del problema.
2. una función objetivo lineal que justamente expresa o representa lo que va a ser optimizado.

El problema podría consistir en:

Se busca maximizar una función condicionada por desigualdades lineales cuando se trata de utilidades, productos o ingresos; o bien, en minimizar una función lineal condicionada por desigualdades lineales, cuando se trata de costos.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Programación Lineal

Por ejemplo en el caso de minimización, el enunciado matemático, en sentido general, de un problema de programación lineal (P.L.) será: Hallar los valores de $X_1$, $X_2$,..., $X_n$ que minimizan la función objetivo Z., y se plantearía de la siguiente manera,

$$\text{Min } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots + C_n X_n$$

Sujeto a:

1. $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$
2. $a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq b_2$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

m-1. $a_{m2} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq b_m$

m. $X_1 \geq 0; X_2 \geq 0; \ldots ; X_n \geq 0$, esto es, las variables deben ser no negativas.

Donde: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables de decisión

$a_{mn}$ son coeficientes unitarios de las variables de decisión

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ son los diferentes recursos disponibles

$m = 1, 2, \ldots, m$

$n = 1, 2, \ldots, n$

“m” restricciones y “n” variables

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## Programación Lineal: Método Gráfico y Método Simplex

Existen una gran diversidad de métodos para la resolución de problemas de programación lineal ya sea optimizando mediante la maximización o la minimización, pero en este curso sólo se abordará el Método Gráfico para problemas con dos variables, y el Método Simplex para múltiples variables a través de artificio matemático de la Gran M.

**Método Gráfico.** Representa un metodología matemática que se vale de la representación gráfica en un plano de coordenadas en las cuales se dibujan tanto las diferentes restricciones como también se suele representar la función objetivo. La idea es encontrar un área de solución factible en la cual generalmente, se ubicará el punto de solución factible que optimizará el problema propuesto.

**Método Simplex.** Es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricción en el número de variables.

El **Método Simplex** es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. La razón matemática de esta mejora radica en que el método consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya (según el contexto de la función objetivo, sea maximizar o minimizar), dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito siempre se hallará solución.

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex y la Matriz Identidad

La matriz identidad en una matriz cuadrada (que posee el mismo número tanto de columnas como de filas) de orden *n* que tiene todos los elementos diagonales iguales a uno (1) y todos los demás componentes iguales a cero (0), se denomina matriz identidad de orden *n*, y se denota por:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Para la resolución de problemas en programación lineal, y específicamente utilizando el método simplex, la teoría de matrices es fundamental, puesto que el algoritmo del simplex se basa en dicha teoría.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Variables de Holgura y Exceso.** El Método Simplex trabaja basándose en "ecuaciones" y restricciones iniciales que por lo general no lo son, es decir casi siempre se plantean "inecuaciones" iniciales las cuales hay que transformar en "ecuaciones" a fin de que el método simplex pueda funcionar. Para llevar a cabo este cometido se utilizan variables de holgura y exceso relacionadas con el recurso al cual se hace referencia la restricción. Estas variables suelen estar representadas por la letra "S", se suman si la restricción es de signo "≤", y se restan si la restricción es de signo "≥". Estos casos se explicarán en el desarrollo de la clase.

Ejemplo de conversión de inecuaciones en igualdad:

$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 200$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 235$
$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 922$
$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 502$

Quedaría como igualdades de la siguiente manera:

$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 200$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0s_1 - 1s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 235$
$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 - 1s_3 + 0s_4 = 922$
$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 502$

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Variables Artificiales y el Método de la Gran M.** Una variable artificial es un truco para convertir inecuaciones mayor (>), mayor igual (≥) en ecuaciones, o cuando aparecen igualdades en el problema original (=), la característica principal de estas variables es que no deben formar parte de la solución, dado que no representan recursos. El objetivo fundamental de esta variables es la formación de la matriz identidad.

Estas variables se representan con la letra “A”, siempre se suman a las restricciones, su coeficiente es M (por esto se denomina Método de la Gran M, donde M significa un número demasiado grande y muy poco atractivo para la función objetivo), y el signo en la función objetivo va en contrasentido de la misma, es decir, en problemas de Maximización su signo es menos (-) y en problemas de Minimización su signo es más (+), repetimos, con el objetivo de que su valor en la solución final sea cero (0).

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

# El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Ejemplo de transformación de un problema de PL a una matriz de la Gran M.**

Minimizar $z = 4x_1 + x_2$

S.S.Rs.:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Con el Método de la Gran M las igualdades y desigualdades quedarían de la siguiente manera:

Minimizar $z - 4x_1 – x_2 - MA_1 - MA_2$

S.S.Rs.:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 \quad\quad + A_1 \quad\quad &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - 1s_1 \quad + A_2 \quad &= 6 \\
x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad + 1s_2 &= 4 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Posteriormente, ya la ecuaciones transformadas en igualdades, y considerando las directrices del Método de la Gran M, el modelo se incorpora a la siguiente tabla sujeta a interacciones a fin de lograr el valor optimo de las variables básicas y reales del problema planteado.

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

| Básica | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $s_2$ | Solución |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | -4 | -1 | 0 | -M | -M | 0 | 0 |
| $A_1$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $A_2$ | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| $S_2$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |

**Antes de proseguir con los cálculos del Método Simplex a través de la Gran M, se necesita hacer que el renglón z sea consistente con el resto de la tabla. En la tabla x1 = x2 = x3 = 0, lo cual produce la solución básica de inicio de A1 = 3, A2 = 6 y s2 = 4. Esta solución indica que el valor de z debe ser M x 3 + M x 6 = 9M, en lugar de 0 como se ve en el lado derecho del renglón de z. Esta inconsistencia se debe a que A1 y A2 tienen coeficientes distintos de cero (-M, -M) en el renglón de z.**

**Estas inconsistencias se pueden eliminar sustituyendo a A1 y A2, en el renglón de z usando las ecuaciones adecuadas de restricción para eliminarlas. En particular, los elementos marcados (= 1) en el renglón A1 y en el de A2, si se les multiplica cada renglón A1 y A2 por m y se agrega la suma al renglón z, A1 y A2 saldrán del renglón objetivo. Esto es mediante lo siguiente:**

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Antes de proseguir con los cálculos del Método Simplex a través de la Gran M, se necesita hacer que el renglón z sea consistente con el resto de la tabla. En la tabla x1 = x2 = x3 = 0, lo cual produce la solución básica de inicio de A1 = 3, A2 = 6 y s2 = 4. Esta solución indica que el valor de z debe ser M x 3 + M x 6 = 9M, en lugar de 0 como se ve en el lado derecho del renglón de z. Esta inconsistencia se debe a que A1 y A2 tienen coeficientes distintos de cero (-M, -M) en el renglón de z.**

**Estas inconsistencias se pueden eliminar sustituyendo a A1 y A2, en el renglón de z usando las ecuaciones adecuadas de restricción para eliminarlas. En particular, los elementos marcados (= 1) en el renglón A1 y en el de A2, si se les multiplica cada renglón A1 y A2 por m y se agrega la suma al renglón z, A1 y A2 saldrán del renglón objetivo. Esto es mediante lo siguiente:**

| Básica | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $s_2$ | Solución |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | -4 | -1 | 0 | -M | -M | 0 | 0 |
| $A_1$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $A_2$ | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| $S_2$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Ejemplo 2: Lleve el siguiente modelo a la tabla simplex inicial por el Método de la Gran M.**

Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$
\text{S.S.Rs.:}\quad
\begin{aligned}
0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\
x_1 + x_2 &= 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

**Solución:**

| Básica | $x_1$ | $x_2$ | $s_2$ | $s_1$ | $A_1$ | $A_2$ | Solución |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | -2 | -3 | 0 | 0 | -M | -M | 0 |
| $A_1$ | 0,5 | 0,25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $A_2$ | 1 | 3 | -1 | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $S_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 |

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: Casos Especiales en la Programación Lineal

## Solución Óptima Degenerada

**La solución óptima degenerada implica que al menos una restricción del modelo planteado del simplex es redundante. Desde el punto de vista del planteamiento tabular significa que al hacer el cálculo del mínimo cociente o condición de factibilidad, se puede romper un empate en razón de cociente mínimo en forma arbitraria. En este caso, al menos una variable básica será cero en la siguiente interacción, dando el caso de una solución degenerada. Cuando se presenta un empate, al menos una variable básica será cero en la siguiente interacción, entonces se dice que la nueva solución es degenerada. Utilizando el método gráfico se puede visualizar más apropiadamente la o las restricciones redundantes.**

**Ejemplo 3: Lleve el siguiente modelo a la tabla simplex inicial o primal.**

Maximizar $z = 3x_1 + 9x_2$

S.S.Rs.: $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: consideraciones a tomar en cuenta

**Solución:**

| Básica | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solución |
|---|---|---|---|---|---|
| z | -3 | -9 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 8 |
| $s_2$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 4 |

Al revisar el resultado de las interacciones tabulares, nos damos cuenta que el valor de z se hace redundante en la soluciones y en la tabla del simplex final quedan como variables básicas las variables artificiales. Al obtener el gráfico observaremos claramente restricciones redundantes.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: Casos Especiales en la Programación Lineal

## Solución Óptima Degenerada

**Ejemplo 3: Lleve el siguiente modelo a la tabla simplex inicial o primal.**

Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2$

S.S.Rs.: $4x_1 + 2x_2 \leq 12$
$4x_1 + x_2 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

**Solución:**

| Básica | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solución |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | -5 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| $s_2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $s_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |

Al correr el modelo, nos daremos cuenta en el gráfico que se observan claramente restricciones redundantes y en la solución tabular **al menos una variable básica será cero, entonces se dice que la nueva solución es degenerada**.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: Casos Especiales en la Programación Lineal

## Solución Óptima Degenerada

**Ejercicios: En los siguientes problemas establezca la tabla simplex inicial o primal y determine desde el punto de vida tabular y gráfico el porqué son problemas con soluciones degeneradas.**

a) Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2$

S.S.Rs.: $x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

b) Minimizar $z = -x_1 - x_2$

S.S.Rs.: $x_1 + x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: Casos Especiales en la Programación Lineal

### **Solución No Acotada**

En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables puede aumentar en forma indefinida sin violar alguna restricción, y eso significa que el espacio de soluciones es no acotado al menos en esa dirección. El resultado es que el valor objetivo puede aumentar (en caso de maximización) o disminuir (en caso de minimización) en forma indefinida. En ese caso, tanto el espacio de soluciones como el valor óptimo objetivo no están acotados (Taja, 2004).

La no acotación apunta hacia la posibilidad del que el modelo esté mal construido. Desde el punto de vista tabular del simplex, un problema no acotado se detecta cuando en un interacción cualquiera existe una variable no básica con costo reducido negativo y todos los elementos en la columna de dicha variable son negativos o cero. Es decir, no se puede seleccionar un pivote para determinar la variable que debe dejar la base.

Ejemplos: Corra estos problemas computacionalmente y explique por que razón son no acotados.

a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

S.S.Rs.:
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Minimizar $z = -2x_1 - 3x_2$

S.S.Rs.:
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

c) Maximizar $z = 6x_1 + 3x_2$

S.S.Rs.:
$$3x_1 + 2x_2 \geq 60$$
$$4x_1 + 4x_2 \geq 100$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

Cada planteamiento de un problema de programación lineal, Primal, se encuentra estrechamente relacionado con otro problema simétrico a él, denominado problema Dual.

El dualismo es una teoría que surge como consecuencia de una profundización en el estudio de la programación lineal porque la distribución de los recursos y la formación de los precios son dos aspectos del mismo problema. Entonces la doble formulación de la programación lineal no se debe considerar como un simple ejercicio matemático, sino que una y otra versión del problema vienen a explicar dos aspectos económicos distintos para una misma situación problémica. Una propiedad fundamental de la relación entre el Primal y el Dual es que la solución optima de cualquiera de estos problemas proporciona la solución óptima para el otro.

Por otro lado, hablando estrictamente de la interpretación de las variables duales se puede afirmar que estas miden la sensibilidad de la función objetivo respecto a cambios (infinitesimales) de los términos independientes de cada restricción. Esta afirmación se reforzará más adelante, luego que se lleven a cabo la solución de un problema Primal llevado a un solución de un Problema Dual.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

### Condiciones de transformación de Primal a Dual

a) Un Problema Primal de maximización será un Problema Dual de minimización y viceversa.
b) Los valores que se encuentran a la derecha de las restricciones del Problema Primal, serán los coeficientes de las variables del Problema Dual en la función objetivo.
c) Cada restricción del Problema Primal será una variable ($y_i$) en la función objetivo del Problema Dual.
d) Para las restricciones del Problema Dual cada renglón o fila del Primal, serán columnas del Dual.
e) El sentido de estas restricciones van a estar dadas por el sentido que tienen las condiciones finales del Problema Primal ($x_i \geq 0$). De maximización Primal a minimización Dual, **todas** las restricciones van a presentar el mismo sentido de la condición final (por lo general ≥). De minimización Primal a maximización Dual, todas las restricciones van a presentar el sentido contrario de la condición final (por lo general ≤).
f) Los coeficientes de la función objetivo del Primal, van a ser los valores que se colocaran a la derecha en las restricciones del Dual.
g) Las condiciones finales del Problema Dual, es decir sus variables ($y_i$), su sentido, van a estar dadas por el sentido de **cada** restricción que presente el Problema Primal. En un problema de maximización Primal a minimización Dual, si la restricción es ≥, en el Dual quedará ≤ y viceversa. Si la restricción en el Primal es =, la condición en el Dual será irrestricta en el signo, es decir, no tiene condición, ni es menor ni es mayor. En un problema de minimización Primal a maximización Dual, pasan con el mismo sentido reflejado en el primal ya sean ≤ ó ≥. Si la restricción en el Primal es =, la condición en el Dual será irrestricta en el signo, es decir, no tiene condición, ni es menor ni es mayor.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

## Condiciones de transformación de Primal a Dual: Ejemplos

a) Primales de maximización a Duales de minimización

Maximizar $z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3$

S.S.Rs.:

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 \geq 500$$
$$2x_2 + 4x_3 \leq 100$$
$$10x_1 + 20x_2 + 10x_3 = 1000$$
$$x_i \geq 0$$

Minimizar $z = 500y_1 + 100y_2 + 1000y_3$

S.S.Rs.:

$$2y_1 + 10y_3 \geq 3$$
$$10y_1 + 2y_2 + 20y_3 \geq 3$$
$$4y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 3$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

$y_3$ = irrestricta en signo

b) Primales de maximización a Duales de minimización

Maximizar $z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$

S.S.Rs.:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$
$$2x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 12$$
$$x_i \geq 0$$

Minimizar $z = 8y_1 + 12y_2$

S.S.Rs.:

$$2y_1 + 2y_2 \geq 2$$
$$2y_1 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 \geq 5$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 6$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

## Condiciones de transformación de Primal a Dual: Ejemplos

c) Primales de minimización a Duales de maximización

Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$

S.S.Rs.:

$$3x_1 - 4x_2 \geq 10$$
$$-5x_1 + 6x_2 \leq 8$$
$$x_i \geq 0$$

Maximizar $z = 10y_1 + 8y_2$

S.S.Rs.:

$$3y_1 - 5y_2 \leq 4$$
$$-4y_1 + 6y_2 \leq 6$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \leq 0$$

d) Primales de minimización a Duales de maximización

Minimizar $z = 8x_1 + 24x_2$

S.S.Rs.:

$$30x_1 + 88x_2 \leq 1320$$
$$-8x_1 + 16x_2 \geq -64$$
$$18x_1 + 30x_2 = 540$$
$$x_i \geq 0$$

Maximizar $z = 1320y_1 - 64y_2 + 540y_3$

S.S.Rs.:

$$30y_1 - 8y_2 + 18y_3 \leq 8$$
$$88y_1 + 16y_2 + 30y_3 \leq 24$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

$y_3$ irrestricta en el signo

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

El problema Primal y Dual explican dos aspectos económicos distintos de un mismo problema. Las variables duales nos vienen a medir el valor de los recursos imputados a la producción, pero esta valoración tiene unas características peculiares, esta realizada en términos de costos de oportunidad. Esto quiere decir que aquellos factores (o restricciones) cuyas existencias no quedan agotadas en el programa óptimo establecido, tienen un costo nulo desde el anterior punto de vista, pues bajo el prisma exclusivo del sistema empresarial es un bien libre al estar en exceso.

En consecuencia, la función objetivo, medirá el costo total de los factores imputados a la producción, valor que ha de igualarse al rendimiento total hallado en la función económica del primal para que se produzca el equilibrio. Explicaremos con más detalle la interpretación económica del Problema Dual.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## La Dualidad en la Programación Lineal: Ejemplo de Estudio

Suponga Usted que un granjero cría gallinas y patos. El costo de la crianza de una gallina es de 6 UM y el de una pato 4 UM hasta el momento de su venta. Las gallinas se venden a 12 UM y los patos a 8 UM. Sabiendo que la granja puede alojar a lo máximo 500 aves y que el granjero no desea tener más de 300 patos ni más de 400 gallinas a la vez. ¿Cuántas aves de cada especie debe criar el granjero a fin de **optimizar** las operaciones de su granja?

Llevando a cabo los pasos matemáticos para resolver el problemas de programación lineal, tenemos:

1.- Identificación de las variables

$x_1$: número de gallinas a criar y a vender por el granjero.
$x_2$: número de patos a criar y a vender por el granjero.

2.- Función objetivo

Max $z = 6x_1 + 4x_2$

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## La Dualidad en la Programación Lineal: Ejemplo de Estudio

3.- Modelo matemático del **Primal**

Maximizar $z = 6x_1 + 4x_2$

S.S.Rs.:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 500 \\
x_1 \phantom{+ x_2} &\le 400 \\
x_2 &\le 300 \\
x_i &\ge 0 \\
i &= 1, 2
\end{aligned}
$$

Introduciendo el modelo a un programa de Programación Lineal, obtenemos:

$x_1$ = número de gallinas que se recomienda criar y a vender por el granjero, 400.
$x_2$ = número de patos que se recomienda criar y a vender por el granjero, 100.
z = 2.800 unidades monetarias de utilidad.

**Interpretación:** con esta propuesta óptima el granjero ocupará todo el espacio de la granja, criando el máximo de gallinas respetando esta restricción. En la restricción de espacio para lo patos, quedaría supuestamente espacio para 200, pero este sobrante es contrarrestado con la limitación global de espacio para criar 500 aves en total.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## La Dualidad en la Programación Lineal: Ejemplo de Estudio

4.- Modelo matemático del **Dual**

Minimizar $z = 500y_1 + 400y_2 + 100y_3$

S.S.Rs.:

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_2 &\geq 6 \\
y_1 + y_3 &\geq 4 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0 \\
y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Introduciendo el modelo a un programa de Programación Lineal, obtenemos:

$y_1 = 6$, que es la contribución marginal en unidades monetarias a la función objetivo por una unidad de aporte o sustracción de la capacidad total para criar aves.
$y_2 = 4$, que es la contribución marginal en unidades monetarias a la función objetivo por una unidad de aporte o sustracción de la capacidad total de gallinas.
$y_3 = 0$, que es la contribución marginal en unidades monetarias a la función objetivo por una unidad de aporte o sustracción de la capacidad total de patos.
z = 2.800 unidades monetarias de utilidad.

**Interpretación:** Es importante destacar que en la restricción de espacio para lo patos, quedaría supuestamente espacio para 200, pero este sobrante en nada afectara como contribución marginal a la función objetivo **(Precio Sombra),** a menos que se lleve a cabo un **Análisis de Sensibilidad.**

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia

## El Método Simplex: La Dualidad en la Programación Lineal

**Precios Sombra:** El precio sombra de una restricción representa la tasa de cambio del valor óptimo ante una modificación marginal del lado derecho de una restricción.

**Análisis de Sensibilidad:** El Análisis de Sensibilidad investiga el cambio en la solución óptima que resulta de hacer cambios en los parámetros del modelo de Programación lineal.

**Problema:** Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades. El mayoristas A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km. de distancia y el mayorista B se encuentra a 300 km., calcular cuántos contenedores habrá que comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero.

a) Formular el modelo matemático Primal, correrlo e interpretar sus resultados.
b) Formular el modelo matemático Dual, correrlo e interpretar sus resultados.
c) Llevar a cabo diferentes modificaciones en los parámetros (análisis de sensibilidad) ya sean en los modelos Primal y Dual y analizar resultados.

# Métodos Cuantitativos para la Gerencia
## **Programación con enteros**

En una solución óptima para programación lineal a veces las variables de decisión tendrán un valor entero, esto es un número entero (0, 1, 2, …). Sin embargo, algunas veces tendrán un valor fraccionario (por ejemplo, 2¾o 4,11353). Ninguna de las restricciones de un modelo de programación lineal prohíbe valores fraccionarios.

En algunas aplicaciones, las variables de decisión tendrán sentido si y sólo si tienen valores enteros. Por ejemplo, puede ser necesario asignar personas, máquinas, o vehículos a actividades en cantidades enteras. Este es el tipo de situación que estudia la programación entera.

Tipos de problemas de programación entera

- Programación entera pura
- Programación entera mixta

Pueden ser con variables binarias (es decir valores de 0 o 1)

# Programación con enteros
## Ejemplo-Problema

TBA Airlines es una compañía regional pequeña que se especializa en vuelos cortos en aviones pequeños. La compañía ha tenido un buen desempeño y la administración decidió ampliar sus operaciones. El asunto básico que ahora enfrenta la administración es si comprar más aviones pequeños para agregar algunos vuelos o comenzar a desplazarse al mercado nacional, comprando algunos aviones grandes para nuevos vuelos a través de todo EEUU (o ambos). Entraran muchos factores en la decisión final de la administración, pero el más importante es cual estrategia es probable que sea más redituable.

La información pertinente se encuentra en la siguiente tabla:

| | Avión pequeño | Avión grande | Capital disponible |
|---|---|---|---|
| Ingreso neto anual por avión | $1 millón | $5 millones | |
| Costo de compra por avión | $5 millones | $50 millones | $100 millones |
| Número máximo de compra | 2 | Sin máximo | |

¿Cuántos aviones de cada tipo se deben comprar para maximizar la ganancia anual neta total?

# Programación con enteros

## PL vs. PE

## Suposiciones Básicas de un PL

Suposición de divisibilidad de Programación Lineal (PL):las variables de decisión en un modelo de programación lineal pueden tomar cualquier valor, incluso valores fraccionarios, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. Así, estas variables no están restringidas a sólo valores enteros. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se puede suponer que las actividades pueden realizarse a niveles fraccionarios. Si se viola esta suposición porque el problema real requiere que las variables de decisión tengan valores enteros, entonces, debe emplearse la Programación Entera (PE) en lugar de la Programación Lineal (PL).

Para el problema de TBA Airlines, las actividades son las compras de aviones de tipos diferentes, de modo que el nivel de cada actividad es el número de aviones de ese tipo comprados. Dado que el número comprado tiene que tener un valor entero, es necesario violar el supuesto de divisibilidad.

# Programación con enteros

## PL vs. PE

## Solución de TBA Airlines por PE

La formulación de Programación Entera de este problema es exactamente la misma que la de Programación Lineal, salvo por una diferencia crucial: se agregan restricciones que requieren que las variables de decisión tengan valores enteros. Por lo tanto, la forma algebraica del modelo de programación entera es:

F. O.
Max. $U = x + 5y$
S. S. R.
1) $5x + 50y \leq 100$
2) $x \leq 2$
3) $x, y \geq 0$ X, y son enteros

Las únicas soluciones factibles para este problema entero son las soluciones enteras que se encuentran en la región sombreada, es decir (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1, 1), (2, 1) y (0,2).

**Nota:** este problema se resuelve manualmente por el método de Ramificar y Acotar.

# Programación con enteros
## Tipos de problemas de PE

Los problemas de Programación Lineal Pura son aquellos donde todas las variables de decisión tienen que ser enteros. Los problemas de Programación Entera Mixta sólo requieren que algunas variables tengan valores enteros (de modo que el supuesto de divisibilidad se cumple para el resto).

Muchas aplicaciones de Programación Entera (ya sea pura o mixta) restringen aun más las variables enteras a sólo dos valores, 0 o 1.

Las variables binarias son variables cuyos únicos valores posibles son 0 y 1. Los problemas de Programación Entera Binaria son aquellos donde las variables de decisión restringidas a valores enteros, están además restringidas a ser variables binarias. También estos problemas pueden ser puros y mixtos.

Importarte: de manera análoga al algoritmo simplex, se podría esperar resolver un PE mediante un algoritmo que pasara una solución entera factible a una solución entera mejor. Por desgracia no se conoce tal algoritmo. Normalmente en más difícil resolver un PE que resolver la relajación PL de un PE.

# Programación con enteros

## Métodos para resolver problemas de PE

Existen varios métodos para resolver problemas de Programación Entera, pero la mayoría son largos y tediosos y rebasan el objetivo de la presente asignatura en materia del conocimiento didáctico y general que deben poseer los estudiantes en materia de Programación Lineal. Algunos métodos manuales para resolver problemas de Programación Entera y Binarios son los siguientes:

a) Método de Ramificar y Acotar: procedimiento para resolver problemas de PE puros, con varias restricciones (como por ejemplo el problema anterior de TBA Airlines).
b) Método de la Mochila: procedimiento para resolver problemas de PEB, con una sola restricción.
c) Método de Enumeración Implícita: procedimiento para resolver problemas de PEB, con varias restricciones.
d) Modelado de casos especiales de restricciones en un PEB.

Todos estos modelos son largos y tediosos de ilustrar, y el objetivo de esta asignatura es el de aprender a plantear problemas e interpretar resultados. Por esa razón nos afianzaremos en ese objetivo con la ayuda del computador.

# Programación con enteros

## Programación Entera Puros

## Ejemplo-problema Método de Ramificar y Acotar

La carpintería de Juanita fabrica mesas y sillas. Una mesa requiere 4 horas de trabajo y 16 pies de tabla de madera; una silla requiere de 1 hora de trabajo y 5 pies de tabla de madera. Actualmente se dispone de 60 horas de trabajo y 220 pies de madera. Cada mesa contribuye con 16 dólares a la utilidad, y cada silla contribuye con 4 dólares a la utilidad. Formule y resuelva por PE a fin de maximizar la utilidad por el método de ramificar y acotar.

Formulación del problema:

F. O.

Max. $U = 16x + 4y$

S. S. R.

1) $4x + y \leq 6$
2) $16x + 5y \leq 220$
3) $x, y \geq 0$ X, y son enteros

Correrlo e interpretar resultados.

# Programación con enteros

## Programación Entera Binaria

### Ejemplo-problema Tipo Mochila

Cierta empresa considera cuatro inversiones. La inversión 1 proporcionará un valor actual neto (VAN) de 16000 dólares; la inversión 2 un VAN de 22000 dólares; la inversión 3 un VAN de 12000 dólares; y la inversión 4 un VAN de 8000 dólares.

Cada inversión requiere cierto flujo de caja en el momento actual: la inversión 1, 5000 dólares; la inversión 2, 7000 dólares; la inversión 3, 4000 dólares; y la inversión 4, 3000 dólares respectivamente. Se dispone de 14000 dólares para la inversión. Formule un PE cuya solución dirá a esta empresa como maximizar el VAN global obtenido de las inversiones 1-4.

# Programación con enteros

## Programación Entera Binaria

## Ejemplo-problema Tipo Mochila

Como en las formulaciones de los PL, empezamos con la definición de una variable para cada decisión que esta empresa debe tomar.

Esto conduce a definir una variable 0-1:

$$x_j \ (j = 1, 2, 3, 4) = \begin{cases} 1 \text{ si se realiza la inversión} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

Por ejemplo, $x_2 = 1$ si se realiza la inversión 2, y $x_2 = 0$ si no se realiza.

Planteamiento formal:

$$\begin{aligned} &\text{Max} = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ &\text{s.s.r.} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ &x_j = 0 \text{ o } 1 \ (j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

# Programación con enteros

## Programación Entera Binaria

## Solución al PEB →Continuación

Cualquier PE, tal como el ejemplo anterior, que tiene solamente una restricción, se llama ***problema de la mochila***.

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$\text{S.S.R.} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$
$$X_i = 0 \text{ o } 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

**Problema Tarea:**

$$\text{Max} = 40x1 + 80x2 + 10x3 + 10x4 + 4x5 + 20x6 + 60x7$$

s.s.r.

$$40x1 + 50x2 + 30x3 + 10x4 + 10x5 + 40x6 + 30x7 \leq 100$$
$$xj = 0 \text{ o } 1 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Correrlo e interpretar resultados.

# Programación con enteros

## Programación Entera Puros

### Ejemplo-problema Método de Enumeración Implícita

Suponga que el consejo directivo de una importante empresa afronta el problema de inversión que se resume en la siguiente tabla (en miles de dólares):

| Alternativa (j) | Valor Actual Neto | Capital requerido en el año i para la alternativa j | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Expansión de una planta en Bélgica | 40 | 10 | 5 | 20 | 10 | 0 |
| Expansión de maquinarias pequeñas en E. U. | 70 | 30 | 20 | 10 | 10 | 10 |
| Crear una nueva planta en Chile | 80 | 10 | 20 | 27 | 20 | 10 |
| Expansión de maquinarias grandes en E. U. | 100 | 20 | 10 | 40 | 20 | 20 |
| Capital disponible en el año j | $b_i$ | 50 | 45 | 70 | 40 | 30 |

Determine que proyectos se deben seleccionar en función de los recursos escasos y del VAN que le presenta esta organización.

# Programación con enteros

## Programación Entera Binaria

### Ejemplo-problema Método de Enumeración Implícita

Como en las formulaciones de los PL, empezamos con la definición de una variable para cada decisión que esta empresa debe tomar.

Esto conduce a definir variables binarias 0-1:

$$x_j \ (j = 1, 2, 3, 4) = \begin{cases} 1 \text{ si se realiza la inversión} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

Planteamiento formal:

$$\begin{aligned}
\text{Max} = 40x_1 + 70x_2 + 80x_3 + 100x_4 \\
\text{s.s.r.} \quad 10x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 20x_4 &\leq 50 \\
5x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 10x_4 &\leq 45 \\
20x_1 + 10x_2 + 27x_3 + 40x_4 &\leq 70 \\
10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4 &\leq 40 \\
10x_2 + 10x_3 + 20x_4 &\leq 30 \\
x_j = 0 \text{ o } 1 \ (j = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

Correrlo e interpretar los resultados

# PROGRAMACIÓN CON ENTEROS

## Modelado de casos especiales de restricciones en un PEB

**Caso cuando se presentan costos fijos**

Problema. Tres empresas pidieron que me suscribiera a su servicio de larga distancia dentro del país. MaBell cobra $16 fijos por mes, más $0,25 por minuto. PaBell cobra $25 por mes, pero el costo por minuto se reduce a $0,21. Y con BabyBell, la tarifa fija es de $18 mensual, y la proporcional es de $0,22 por minuto. Suelo hacer un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no pague el cargo fijo si no hago llamadas, y que puedo repartir a mi voluntad mis llamadas entre las tres empresas, ¿cómo debo repartir las llamadas entre las tres empresas para minimizar mi recibo telefónico mensual?

Este problema se puede resolver con facilidad sin plantearlo como entero. Sin embargo, es ilustrativo formularlo como sigue:

$x_1$: Minutos de larga distancia por mes con MaBell.
$x_2$: Minutos de larga distancia por mes con PaBell.
$x_3$: Minutos de larga distancia por mes con BabyBell.

$y_1 = 1$ si $x_1 > 0$ y $0$ si $x_1 = 0$
$y_2 = 1$ si $x_2 > 0$ y $0$ si $x_2 = 0$
$y_3 = 1$ si $x_3 > 0$ y $0$ si $x_3 = 0$

# PROGRAMACIÓN CON ENTEROS

## Programación Entera Binaria

## Modelado de casos especiales de restricciones en un PEB

Se puede asegurar que $y_i$ sea igual a 1 si xi es positiva usando la siguiente restricción

$$x_j \leq My_j \text{ , } j = 1, 2, 3.$$

Se debe seleccionar el valor M lo suficiente grande como para no restringir en forma artificial a las variables $x_j$. Como se hacen aproximadamente 200 minutos de llamadas por mes, entonces $x_j \leq 200$ para toda j, y puede seleccionar M = 200 con seguridad. El modelo completo sería el siguiente:

$$\text{Min } z = 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18\,y_3$$

SSR:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 200 \\
x_1 \qquad\qquad &\leq 200y_1 \\
x_2 \qquad &\leq 200y_2 \\
x_3 &\leq 200y_3 \\
x_1 \text{ , } x_2 \text{ , } x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$y_1$, $y_2$, $y_3$ enteros y binarios

# PROGRAMACIÓN CON ENTEROS

## Modelado de casos especiales de restricciones en un PEB

**Caso cuando se presentan costos fijos**

Problema-Tarea.

Una empresa europea piensa instalar plantas de producción en Venezuela para lanzar sus productos al mercado venezolano por lo que necesita decidir su plan de producción para el próximo año. La empresa puede fabricar $P_i$ ($P_1$, $P_2$, y $P_3$) productos distintos y la elaboración de cada uno de ellos implica la compra de una máquina especializada para su elaboración a un costo de $10.000, $12.000, y $9.000 respectivamente. Además, el costo variable de producir una unidad del producto $P_i$ es de $5, $3, y $7$ respectivamente. Así, si se decide elaborar el producto $P_i$ se deberá necesariamente incurrir en un Costo de Fijo más los Costos Variables por la elaboración del producto y si se decide no fabricarlo no se incurrirá en ningún tipo de gasto. Si la demanda pronosticada para el producto $P_i$ es de 5.000, 7.000, y 4.500 unidades respectivamente (la cual es la máxima a atender) pudiendo venderse dicho producto a un precio de $10, $7, y $11$ respectivamente, formule (sólo modele) un PPL mixto que resuelva el problema de encontrar el conjunto de productos que la empresa debe fabricar.