SOLUCIÓN EXAMEN II

Nombres: Apellidos: C.I.: Firma: Fecha:

MÉTODOS ESTADÍSTICOS I – EXAMEN II ***Prof. Gudberto León***

NOTA:

*i. Recuerde que este es un examen de desarrollo por lo que **debe** incluir **todos** los pasos necesarios que justifiquen los resultados. Favor encerrar sus respuestas de forma tal que sea fácil de encontrarlas en su desarrollo. **Solamente** se responderán aquellas preguntas tendientes a aclarar enunciados de los problemas.*

*ii. Las respuestas a las preguntas de este examen debe escribirlas en papel **tipo examen** (papel ministro) No son válidas las respuestas escritas en esta hoja de preguntas.*

iii. Debe definir de manera explícita y en términos del problema los eventos y variables aleatorias que utilice.

1. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes y P(A) = 0,2, P(B)= 0,3 y P(C)=0,5; encuentre:
   a. $P(A \cup B)$ b. $P\left[A^c \cap (B \cup C)\right]$ c. ¿Los eventos A y B son independientes? Justifique su respuesta

(3 puntos)

2. Una cadena de hamburguesas sabe que el 75% de sus clientes utiliza mostaza, el 80% utiliza kétchup y el 65% utiliza ambos. Encuentre la probabilidad de que:
   a. Un determinado cliente utilice al menos uno de los dos
   b. Un determinado cliente no utilice mostaza ni kétchup
   c. Un consumidor de kétchup utilice mostaza
   d. Un cliente utilice mostaza si no es consumidor de kétchup
   e. ¿Los eventos usar mostaza y usar kétchup son independientes? Justifique su respuesta.

(5 puntos)

3. El director de personal de una empresa desea seleccionar a 2 de 5 candidatos para dos cargos disponibles y todos los candidatos tienen la misma oportunidad de ser seleccionados. Tres de los candidatos son de un determinado partido político y dos no lo son. Encuentre:
   a. La distribución de probabilidad para la V.A. Y que representa el número de candidatos de ese partido político finalmente seleccionados.
   b. Halle la media de la V.A. Y. Interprete.
   c. Var(2Y-2)
   d. $P(0 < Y \le 2)$
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccionen por lo menos a dos de los tres miembros del partido político?
   f. P(Y = 1,2)

(7 puntos)

4. En cierta comunidad el 5% de todos los adultos mayores de 60 años padecen la enfermedad de alzhéimer. Si un médico de esta comunidad diagnostica correctamente que el 95% de todas las personas que padecen alzhéimer tiene la enfermedad y diagnostica incorrectamente que el 3% de todas las personas que no padecen la enfermedad la tienen.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona mayor de 60 años diagnosticada por este médico como un enfermo de alzhéimer en realidad padezca la enfermedad?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona mayor de 60 años sea diagnosticada por este médico como un enfermo de alzhéimer?

(3 puntos)

5. Si *a* y *b* son constantes cualesquiera y *X* una variable aleatoria, demuestre que:
   $E\left(aX^2 + bX\right) = aE\left(X^2\right) + bE(X)$ **(2 puntos)**

FORMULARIO:

$P(A \setminus B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	$P(A \cap B) = P(A \setminus B) * P(B) = P(B \setminus A) * P(A)$	$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B \setminus A) * P(C \setminus A \cap B)$
$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$	$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A \setminus B_i)$	$P(B_j \setminus A) = \dfrac{P(B_j) * P(A \setminus B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) * P(A \setminus B_i)}$; j=1,2, ... , n
$E(X) = \sum x * P(X = x)$	$E[g(X)] = \sum g(x) * P(X = x)$	$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right] = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$

SOLUCIÓN EXAMEN II

Solución Ex. II de Métodos Estadísticos I

1) $P(A)=0,2$; $P(B)=0,3$; $P(C)=0,5$; A, B y C son disjuntos

a) $P(A\cup B) = P(A)+P(B) = 0,2+0,3 = 0,5$ //

b) $P[A^c\cap(B\cup C)] = P(B\cup C) - P[A\cap(B\cup C)]$ → usando el teorema: $P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

$= P(B\cup C) - P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

$= P(B)+P(C) - [P(\phi\cup\phi)]$

$= P(B)+P(C) = 0,3+0,5$

$= 0,8$ //

c) Sabemos que si A y B son mutuamente excluyentes, A y B no pueden ser independientes.

2) M: Cliente que utiliza mostaza

K: " " " ketchup

$P(M)=0,75$

$P(K)=0,8$

$P(M\cap K)=0,65$

a) $P(M\cup K) = P(M)+P(K)-P(M\cap K)$

$= 0,75+0,8-0,65$

$= 0,9$ //

b) $P(M^c\cap K^c) = P(M\cup K)^c = 1-P(M\cup K) = 1-0,9 = 0,1$ //

c) $P(M\backslash K) = \dfrac{P(M\cap K)}{P(K)} = \dfrac{0,65}{0,8} = 0,8125$

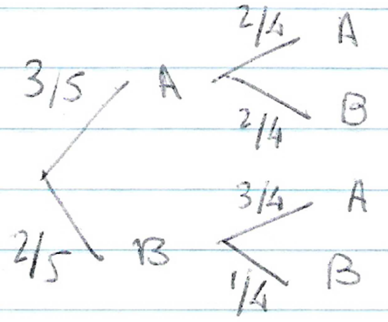
d) $P(M\backslash K^c) = \dfrac{P(M\cap K^c)}{P(K^c)} = \dfrac{P(M)-P(M\cap K)}{1-P(K)} = \dfrac{0,75-0,65}{0,2} = \dfrac{0,1}{0,2}$

$= 0,5$ //

e) Como P(M \ K) ≠ P(M), implica que los eventos M y K no son independientes

SOLUCIÓN EXAMEN II

3) Sea A: Candidato perteneciente al partido político
y B: " no " " " "



3 A
2 B
5

$\Omega = \{AA, AB, BA, BB\}$

Y: Nro de candidatos que pertenezcan al partido político

a) $P(Y=0) = P(BB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

$P(Y=1) = P(AB) + P(BA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$

$P(Y=2) = P(AA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

Así,

y	0	1	2	
$P(Y=y)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

SOLUCIÓN EXAMEN II

B) $E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{20} + 1 \cdot \frac{12}{20} + 2 \cdot \frac{6}{20} = \frac{24}{20}$

$\Rightarrow \boxed{E(Y) = 1{,}2}$

C) $Var(2Y-2) = 2^2 Var(Y) = 4\, Var(Y)$

pero, $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

calculando $E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{2}{20} + 1^2 \cdot \frac{12}{20} + 2^2 \cdot \frac{6}{20} = \frac{36}{20}$

Entonces sustituyendo en:

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{36}{20} - \left(\frac{24}{20}\right)^2 = 0{,}36$

finalmente,

$Var(2Y-2) = 4\, Var(Y) = 4 \times 0{,}36 = 1{,}44$

D) $P(0 < Y \leq 2) = P(Y=1) + P(Y=2) = \frac{12}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20}$

E) $P(Y \geq 2) = \frac{6}{20}$

F) P(Y = 1,2) = 0. La variable aleatoria es discreta y solamente toma los valores 0, 1 y 2 con probabilidades mayores que cero.

SOLUCIÓN EXAMEN II

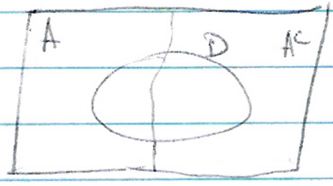
4. A: Persona mayor de 60 años con alzheimer

D: Diagnóstica alzheimer

$P(A) = 0,05$

$P(D \mid A) = 0,95$

$P(D \mid A^c) = 0,03$



a). $$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(A^c) \cdot P(D \mid A^c)}$$

$$= \frac{0,05 \cdot 0,95}{0,05 \cdot 0,95 + 0,95 \cdot 0,03} = \frac{0,0475}{0,076} = 0,625$$

b) $P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(A^c) \cdot P(D \mid A^c) = 0,076$

5. $$E(ax^2 + bx) = \sum (ax^2 + bx) \cdot P(X = x) = \sum \left[ax^2 \cdot P(X = x) + bx \cdot P(X = x) \right]$$

$$= a \sum x^2 \cdot P(X = x) + b \sum x \cdot P(X = x)$$

$$= a\, E(x^2) + b\, E(x)$$