Solución Examen II

Nombre: Apellido: C.I.: Fecha: 22/04/2005 Firma:

Prof. Gudberto León

MÉTODOS ESTADÍSTICOS I – EXAMEN II

<u>NOTA</u>:

*i. Recuerde que este es un examen de desarrollo por lo que **debe** incluir **todos** los pasos necesarios que justifiquen los resultados. Favor encerrar sus respuestas de forma tal que sea fácil de encontrarlas en su desarrollo. <u>**Solamente** se responderán aquellas preguntas tendientes a aclarar enunciados de los problemas</u>.*

*ii. Las respuestas a las preguntas de este examen debe escribirlas en papel **tipo examen** (papel ministro) No son válidas las respuestas escritas en esta hoja de preguntas.*

*iii. Debe definir de manera explícita y en términos del problema los **eventos** y **variables aleatorias** que utilice.*

1. Una bolsa contiene 20 caramelos, de los cuales 10 son dulces, 4 ácidos y 6 picantes. Si una niña selecciona 2 caramelos aleatoriamente:
   a. Determine la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el número de caramelos ácidos cuando se seleccionan dos caramelos de la bolsa.
   b. Encuentre $F_X^{(x)}$
   c. Calcule:
      i. $P(X=6)$
      ii. $P(X\leq 1)$
      iii. $P(0\leq X<2)$
      iv. $F_X^{(2,2)} - F_X^{(1)}$ **(7 puntos)**

2. La constructora Hormigón Andino (HA) trata de determinar si debería presentar una oferta para la construcción de una nueva autopista. Su principal competidora, la constructora Asfaltos Mérida (AM), se ha presentado a un 70% de las contrataciones en el pasado. Si AM no presenta una oferta, la probabilidad de que su rival obtenga la obra es 0.5; si presenta oferta, la probabilidad de que HA reciba el contrato es 0,25.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la constructora Hormigón Andino gane el contrato?
   b. Si la constructora Hormigón Andino gana el contrato, ¿Cuál es la probabilidad de que la constructora Asfaltos Mérida no haya presentado la oferta? **(4 puntos)**

3. Demuestre que $P\left(A\cap B^c\right) = P\left(A\right) - P(A\cap B)$ **(2 puntos)**

4. Sean A, B y C tres eventos mutuamente independientes, tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.1$ y $P(C) = 0.3$. Encuentre:
   a. $P(B\cap C)$
   b. $P(A\cup B)$
   c. $P(A^c\cup B)$
   d. $P(A^c\cap B^c\setminus C)$ **(4 puntos)**

5. Si llueve, un vendedor de paraguas gana 25000 Bs. por día, y si no llueve pierde 6000 Bs. por día ¿Cuál es su ganancia esperada si la probabilidad de lluvia es de 0,3? Interprete el resultado. **(3 puntos)**

FORMULARIO:

$$P\left(A\setminus B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B)=P\left(A\setminus B\right)*P(B)$$
$$=P\left(B\setminus A\right)*P(A)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)*P\left(B\setminus A\right)*P\left(C\setminus A\cap B\right)$$

$$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)*P\left(A\setminus B_i\right)$$

$$P(B_j\setminus A)=\frac{P(B_j)*P\left(A\setminus B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)*P\left(A\setminus B_i\right)};\quad j=1,2,\ldots,n$$

$$E\left[X\right]=\sum_{x=0}^{\infty}x*P\left(X=x\right)$$

$$E\left[g(X)\right]=\sum_{x=0}^{\infty}g(x)*P\left(X=x\right)$$

$$V\left(X\right)=E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]$$
$$=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2$$

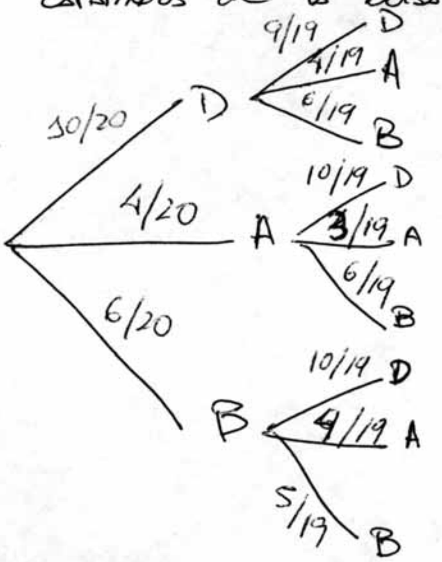
Solución Examen II

1)

10 D
4 A
6 B

D: Caramelo dulce
A: Caramelo ácido
B: Caramelo picante

a. X: Número de caramelos ácidos cuando se seleccionan dos caramelos de la bolsa



$\Omega = \{DD, DA, DB, AD, AA, AB, BD, BA, BB\}$

$P(X=0) = P(DD) + P(DB) + P(BD) + P(BB)$

$= \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19} + \frac{10}{20}\cdot\frac{6}{19} + \frac{6}{20}\cdot\frac{10}{19} + \frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}$

$= \frac{90+60+60+30}{380} \Rightarrow \boxed{P(X=0) = \frac{240}{380}}$

$P(X=1) = P(DA) + P(AD) + P(AB) + P(BA)$

$= \frac{10}{20}\cdot\frac{4}{19} + \frac{4}{20}\cdot\frac{10}{19} + \frac{4}{20}\cdot\frac{6}{19} + \frac{6}{20}\cdot\frac{4}{19} = \frac{40+40+24+24}{380}$

$\boxed{P(X=1) = \frac{128}{380}}$

$P(X=2) = P(AA) = \frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19} \Rightarrow \boxed{P(X=2) = \frac{12}{380}}$

Entonces, la distribución de probabilidad de X viene dada por:

x	0	1	2	
$P(X=x)$	$\frac{240}{380}$	$\frac{128}{380}$	$\frac{12}{380}$	1

b.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{240}{380} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{368}{380} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

c. i. $P(X=6) = P(\emptyset) = 0$

ii. $P(X \le 1) = F_X(1) = \frac{368}{380}$

iii. $P(0 \le X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{240}{380} + \frac{128}{380} = \frac{368}{380}$

iv. $F_X(2,2) - F_X(1) = 1 - \frac{368}{380} = \frac{12}{380}$

Solución Examen II

2) M: Constructora Asfaltos Mérida presenta oferta

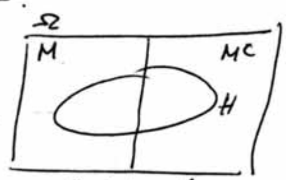
H: Constructora Hormigón Andino (HA) gana el contrato

$P(M) = 0{,}70$

$P(H \setminus M^c) = 0{,}5$

$P(H \setminus M) = 0{,}25$

Nótese que:



Existe una partición de Ω.

a. $P(H)$. Por teorema de Probabilidad total, se tiene que:

$$P(H) = P(M) \cdot P(H|M) + P(M^c) \cdot P(H \setminus M^c)$$
$$= 0{,}70 \cdot 0{,}25 + 0{,}30 \cdot 0{,}5 = 0{,}325$$

$\therefore \boxed{P(H) = 0{,}325}$

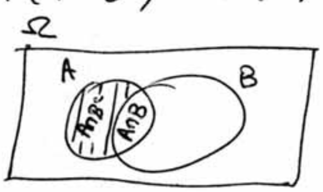
b. $P(M^c \setminus H)$. Por teorema de Bayes se tiene:

$$P(M^c \setminus H) = \frac{P(M^c) \cdot P(H \setminus M^c)}{P(H)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}325} = 0{,}4615$$

$\Rightarrow \boxed{P(M^c \setminus H) = 0{,}4615}$

3. Demostrar que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Nótese que



Así, se puede ver que $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$. Entonces,

$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, ya que los eventos $(A \cap B^c)$ y $(A \cap B)$ son disjuntos

$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)}$

Solución Examen II

4. A, B y C son independientes

$P(A)=0,4$

$P(B)=0,1$

$P(C)=0,3$

a. $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$ por independencia de B y C

$= 0,1 * 0,3 \Rightarrow \boxed{P(B\cap C)=0,03}$

b. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$, por independencia de A y B

$= 0,4 + 0,1 - 0,4\cdot 0,1$

$\boxed{P(A\cup B) = 0,46}$

c. $P(A^c\cup B) = P(A^c)+P(B)-P(A^c\cap B)$

$= P(A^c)+P(B)-P(A^c)\cdot P(B)$, por independencia de A^c y B, ya que A y B son independientes

$= 0,6 + 0,1 - 0,6\cdot$ **0,1**

$\boxed{P(A^c\cup B) = \textbf{0,64}}$

d. $P(A^c\cap B^c \setminus C) = P(A^c\cap B^c)$ ya que A^c, B^c y C son independientes.

Así,

$P(A^c\cap B^c\setminus C) = P(A^c\cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c) = 0,6\cdot 0,9$

$\boxed{P(A^c\cap B^c \mid C) = 0,54}$

5. Sea la variable aleatoria Y: Ganancia del vendedor. Entonces

y	-6000	25000	
$P(Y=y)$	$0,7$	$0,3$	1

$E(Y) = -6000\cdot 0,7 + 25000\cdot 0,3 \Rightarrow \boxed{E(Y)=3300 \text{ Bs}}$

El vendedor espera ganar en promedio 3300 Bs diarios.