SOLUCIÓN EXAMEN II. Métodos Estadísticos I

Nombre: Apellido: C.I.: Firma: Fecha: 15/10/2004

MÉTODOS ESTADÍSTICOS I – EXAMEN II ***Prof. Gudberto León***

PARTE I: ***Marque con un círculo la respuesta correcta (0,5 puntos c/u):***

1. Suponga que se lanza una moneda de Bs. 100 y otra de Bs. 500. Sea A el evento que en la moneda de Bs.100 sale cara y B el evento que en la moneda de Bs.500 sale sello. Los eventos A y B son:
   a. Disjuntos
   b. Complementarios
   c. Independientes
   d. Exhaustivos
   e. Unidos

2. Se ha calculado que la probabilidad de que un jugador A de la selección de baloncesto de la ULA convierta un tiro libre es de 0,7. Al comienzo de un juego el ha fallado sus primeros tres tiros libres. Usted puede concluir correctamente que:
   a. Él convertirá en sus próximos siete tiros libres
   b. Él encestará siete tiros libres seguidos durante algún juego de la temporada, pero no necesariamente en este juego
   c. El jugador convierte un tiro libre cada siete juegos
   d. No se puede decir con certeza cuantos tiros libres convertirá
   e. El jugador convertirá exactamente 7 tiros libres de cada 10 lanzamientos

3. Se lanzan dos monedas y se cuenta el número total de caras. ¿Cuál de los siguientes será un modelo de probabilidad legítimo para el número total de caras? En otras palabras, ¿Cuál de los siguientes modelos satisface las reglas de probabilidad?
   a. Número de caras: 0 1 2
      Probabilidad: $1/3 \quad 2/3 \quad 1/3$
   b. Número de caras: 0 1 2
      Probabilidad: $1/16 \quad 5/8 \quad 5/16$
   c. Número de caras: 0 1 2
      Probabilidad: $1/2 \quad 3/4 \quad -1/4$
   d. Número de caras: 0 1 2
      Probabilidad: $3/2 \quad 3/4 \quad 1/4$
   e. Ninguno de los modelos anteriores satisface las reglas de probabilidad.

4. La probabilidad es un número que mide **EL CHANCE** de ocurrencia de un suceso.

5. Se dice que un espacio muestral es **FINITO EQUIPROBABLE** cuando está constituido por un número determinado de puntos muestrales y todos presentan la misma probabilidad de ocurrencia

<u>NOTA</u>:

*i. Recuerde que este es un examen de desarrollo por lo que **debe** incluir **todos** los pasos necesarios que justifiquen los resultados. Favor encerrar sus respuestas de forma tal que sea fácil de encontrarlas en su desarrollo. **Solamente** se responderán aquellas preguntas tendientes a aclarar enunciados de los problemas.*

*ii. Las respuestas a las preguntas de la Parte II de este examen debe escribirlas en papel **tipo examen** (papel ministro) No son válidas las respuestas escritas en esta hoja de preguntas.*

iii. Debe definir de manera explícita y en términos del problema los eventos y variables aleatorias que utilice.

1. Una compañía que fabrica cierto componente eléctrico tiene tres plantas manufactureras produciendo 50%, 30% y 20%, respectivamente, de su producto. Suponga que las probabilidades de que un componente fabricado en una de estas plantas esté defectuoso son 0,02; 0,05 y 0,01, respectivamente. Si uno de estos componentes es seleccionado aleatoriamente de la producción de la compañía,
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?
   b. Si el componente seleccionado está defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido seleccionado de la planta 2?

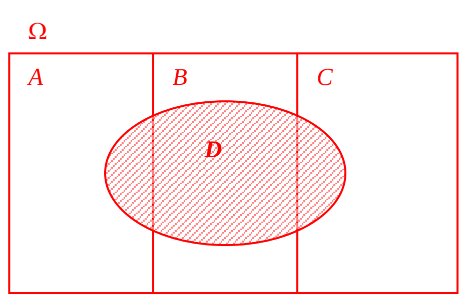
(3 puntos)

Sea D el evento que el componente eléctrico está defectuoso. Y sean A, B y C los eventos que representan que el componente fue fabricado en la planta 1, 2 y 3, respectivamente. Así se tiene del enunciado del problema que:

$$P(A) = 0,5\,;\; P(B) = 0,3 \text{ y } P(C) = 0,2$$

$$P(D \setminus A) = 0,02\,;\; P(D \setminus B) = 0,05 \text{ y } P(D \setminus C) = 0,01$$

En este problema existe una partición del espacio muestral, que se puede visualizar en el siguiente diagrama de venn:



SOLUCIÓN EXAMEN II. Métodos Estadísticos I

Se puede notar en el diagrama de venn que están dadas las condiciones para poder usar el Teorema de Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.

a. En este caso se debe usar el Teorema de Probabilidad Total. Así en este caso se tiene que:

$$P(D) = P(A)P(D \setminus A) + P(B)P(D \setminus B) + P(C)P(D \setminus C)$$
$$= 0,5 * 0,02 + 0,3 * 0,05 + 0,2 * 0,01$$
$$= 0,027$$

b. Ahora se debe usar el Teorema de Bayes:

$$P(B \setminus D) = \frac{P(B)P(D \setminus B)}{P(A)P(D \setminus A) + P(B)P(D \setminus B) + P(C)P(D \setminus C)}$$
$$= \frac{0,3 * 0,05}{0,027} = 0,556$$

2. Dadas las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,8$ y $P(A \cap B) = 0,75$; Encuentre:

a. $P(A \cup B)$

b. $P(A \cap B^c)$

c. $P(A^c \cap B^c)$

d. $P(B^c \setminus A^c)$

e. ¿Los eventos A y B son independientes? Justifique su respuesta.

(5 puntos)

a. $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0,9 + 0,8 - 0,75 = 0,95$$

b. $$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0,9 - 0,75 = 0,15$$

c. $$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0,95 = 0,05$$

d. $$P(B^c \setminus A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{0,05}{1-0,9} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$$

e. A y B no son independientes ya que no se cumple que $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. $P(A) * P(B) = 0,9 * 0,8 = 0,72$ y es diferente de $P(A \cap B) = 0,75$.

3. Suponga que en un día una compañía produce 850 partes de las cuales 50 partes no están conformes con los requerimientos del cliente. Dos partes son seleccionadas aleatoriamente, sin reemplazo, del lote. Sea X la variable aleatoria que representa al número de partes defectuosas en la muestra.

a. Encuentre la distribución de probabilidad de X

b. La función de distribución acumulada de X

c. Calcule:

i. $P(X \geq 1)$

ii. $P(X = 1,3)$

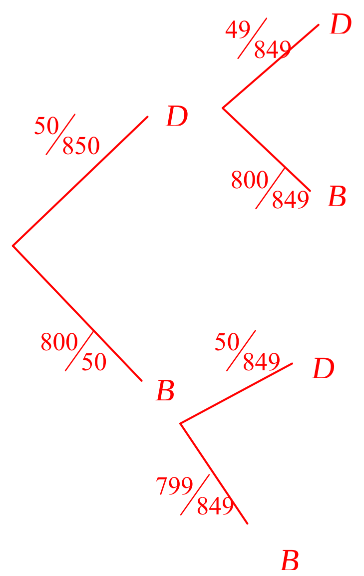
iii. $E(X)$. Interprete.

iv. $Var(2X)$

(7,5 puntos)

SOLUCIÓN EXAMEN II. Métodos Estadísticos I

a. En primer lugar se debe determinar el espacio muestral, para lo cual se construirá un diagrama de árbol. Sea el evento D que representa a las partes defectuosas y el evento B a las partes buenas o no defectuosas:



Así, se tiene que el espacio muestral de este experimento es: $\Omega = \{DD, DB, BD, BB\}$.

En el enunciado del problema se define la siguiente variable aleatoria X : *Número de partes defectuosas en una muestra de dos partes*. Por tanto, los valores de X son $x = 0, 1, 2$. Para hallar la distribución de probabilidad de X hace falta determinar las probabilidades para cada uno de los valores $x = 0, 1, 2$, que toma nuestra variable aleatoria. Ayudándonos con el diagrama de árbol se obtiene:

$$P(X = 0) = P(\{BB\}) = \frac{800}{850} * \frac{799}{849} = \frac{639200}{721650} = 0,8857$$

$$P(X = 1) = P(\{DB, BD\}) = 2 * \frac{50}{850} * \frac{800}{849} = \frac{80000}{721650} = 0,1110$$

$$P(X = 2) = P(\{DD\}) = \frac{50}{800} * \frac{49}{849} = \frac{2450}{721650} = 0,0034$$

Entonces, la distribución de probabilidad de X está dada por:

x	**0**	**1**	**2**	
P (X=x)	0,8857	0,1110	0,0034	**1**

b. La función de distribución acumulada viene dada por:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}8857 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0{,}9964 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

c.

i. $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8857 = 0,1143$

ii. $P(X = 1,3) = 0$

iii. $E(X) = 0 * 0,8857 + 1 * 0,1110 + 2 * 0,0034 = 0,1178$. El valor esperado $E(X) = 0,1178$; en este caso representa al promedio de partes defectuosas en la muestra de tamaño 2.

iv. $Var(2X) = 2^2 Var(X) = 4Var(X)$. Ahora hay que calcular la varianza de *X:*

SOLUCIÓN EXAMEN II. Métodos Estadísticos I

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, pero

$E(X^2) = 0^2 * 0,8857 + 1^2 * 0,1110 + 2^2 * 0,0034 = 0 + 0,1110 + 0,0136$

$= 0,1246$

Entonces,

$Var(X) = 0,1246 - (0,1178)^2 = 0,1254 - 0,0139$

$Var(X) = 0,1115$

Finalmente,

$Var(2X) = 4Var(X) = 4 * 0,1115$

$Var(2X) = 0,446$

4. Demuestre que si X es una variable aleatoria, entonces se cumple que: $E(m*X+k) = m*E(X)+k$, donde m y k son constantes cualesquiera.

(2 puntos)

$$E(m*X+k) = \sum_x (m*x+k)P(X=x) = \sum_x (m*x)P(X=x) + \sum_x k*P(X=x)$$

$$= m\sum_x x*P(X=x) + k\sum_x P(X=x)$$

$$= m*E(X) + k*1$$

$$= m*E(X) + k$$

FORMULARIO:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B) = P(A \setminus B)*P(B) = P(B \setminus A)*P(A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)*P(A \setminus B_i)$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)*P(B \setminus A)*P(C \setminus A\cap B)$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x*P(X=x)$$

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)*P(X=x)$$

$$P(B_j \setminus A) = \frac{P(B_j)*P(A \setminus B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)*P(A \setminus B_i)}; \quad j=1,2, \dots, n$$
