Guía de Ejercicios No. 1

Tema 0 (Distribuciones Univariantes)

1. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $B(n, p)$. Demuestre que si $n \to \infty$, $p \to 0$ y $\lambda = np$ permanece constante, se cumple que: $B(n, p) \to Poisson(\lambda)$.
2. Encuentre, por definición, la función generatriz de momentos de una variable aleatoria normal estandarizada.
3. Considérese el juego de lanzar un par de dados 24 veces. Calcule la probabilidad de obtener por lo menos un doble seis.

   <u>Nota</u>: Este cálculo fue hecho originalmente en el siglo XVII por Pascal, por requerimiento del jugador De Meré.
4. Se lanzan 5 dados a la vez. Sea X la variable aleatoria que representa el número de veces que sale el uno. Calcule:
   a. $E(X)$ b. $Var(X)$ c. $P\,(1 \leq X \leq 4)$ d. $P\,(X \geq \mu + 2\sigma)$
5. El costo de un experimento en biología es de 100.000 Bs., si el experimento falla tiene un costo adicional de 20.000 Bs. Si la probabilidad de éxito del experimento es de 0,5; un ensayo es independiente del próximo, y el investigador debe repetir el experimento hasta culminarlo exitosamente, ¿Cuál es el costo esperado para obtener el primer éxito?
6. a. Diga cuáles de las distribuciones vistas en clase se fundamentan en el experimento de Bernoulli
   b. Defina en términos de una variable aleatoria X, cada una de las distribuciones que usted mencionó en a.
7. Diga cómo se relacionan las siguientes distribuciones:
   a. Poisson y binomial b. Binomial e hipergeométrica
8. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica. Demuestre que:
   $P(\,X > s + t \,/\, X > t) = P\,(X > s)$, donde $s = 0{,}1{,}2\,\ldots$; $t = 0{,}1{,}2, \ldots$
9. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial demuestre que: $\mathrm{P}(X > s + t \,/\, X > t) = P(X > s)$ para $s, t > 0$.

   <u>Nota</u>: en los problemas 8 y 9 se pide demostrar la propiedad de "pérdida de memoria" que poseen las distribuciones geométrica y exponencial
10. Sea X el número de veces que es necesario lanzar un dado hasta que se obtiene un dos o un tres por primera vez. Encuentre: $M_X^{(t)}$, $E(X)$ y $Var(X)$.
11. Para evitar la detención en la aduana, un traficante de drogas coloca 6 tabletas de narcótico en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina de aspecto semejante. Si el oficial de aduana selecciona al azar 3 tabletas para su análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el traficante sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos?
12. Dos dados son lanzados 10 veces. ¿cuál es la probabilidad que un total de 9 o 7 (la suma sea 9 o 7) resulta en k lanzamientos, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$? [Tomado de Khazanie, R., (1976), p.160].
13. La probabilidad de darle a un objetivo con un disparo es $2/3$. Si una persona dispara 8 veces al objetivo, sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que él le da al objetivo, y encuentre: [Tomado de Khazanie, R., (1976), p.161]
    a. $P\,(X = 3)$ b. $P(1 < X \leq 6)$ c. $P\,(X > 3)$
14. Una urna contiene M semillas blancas de las cuáles B son blancas y $M - B$ son negras. Suponga que n semillas son seleccionadas. Sea X la variable aleatoria que denota el número de semillas blancas en la muestra. Encuentre la distribución de X asumiendo que:
    a. La muestra es extraída sin reemplazo b. La muestra es extraída con reemplazo
15. Cierto tipo de árboles tiene retoños dispersos de manera aleatoria sobre un área extensa, con una densidad promedio de retoños de aproximadamente cinco por yarda cuadrada. Encuentre la probabilidad de que un guardabosque, al escoger al azar 10 porciones de una yarda cuadrada en esa área, no encuentre retoño alguno en ninguna de las porciones. [Tomado de Mendenhall, W., et. Al., (1986), p.95]
16. Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:
    $$f_X^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{18\pi}}\, e^{-(X^2 - 10x + 25)/18}, \quad -\infty < x < \infty.$$
    Demuestre que la distribución es normal y encuentre las constantes μ y σ.

17. Si el número de automovilistas que corren a alta velocidad (que un radar detecta por hora) en cierta localidad de una autopista es una variable aleatoria de Poisson con $\lambda = 8{,}4$ ¿cuál es la probabilidad de tener un tiempo de espera menor de diez minutos entre automovilistas sucesivos que circulan a alta velocidad?
18. Para un espacio de probabilidad dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y para A perteneciente a $\mathcal{A}$, se define la variable aleatoria X como la función indicadora de A; es decir, $X(\omega) = I_A^{(\omega)}$. Especifique la distribución de X.
19. Diga por cuáles de las distribuciones vistas en clase, la variable aleatoria $X \sim B(n,p)$ puede ser aproximada. Para cada caso especifique las condiciones para la aproximación.
20. Suponga que el número promedio de llamadas telefónicas que llegan al cuadro de distribución de una empresa, es de treinta llamadas por hora.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan llamadas en un período de 3 minutos?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que más de cinco llamadas lleguen en un intervalo de cinco minutos?
21. Lotes de cuarenta componentes cada uno se consideran aceptables si no contienen más de tres defectuosos. El procedimiento de muestreo del lote consiste en seleccionar 5 componentes aleatoriamente y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente se encuentre un defectuoso en la muestra si hay tres defectuosos en todo el lote?
22. Para atraer clientes, una tienda por departamentos ha comenzado el juego GANE. Cualquier persona que coleccione las cuatro letras de las palabra GANE, obtiene un premio. Una señora llamada Erika quien tiene tres letras G, A y E, va a la tienda hasta obtener la cuarta letra N. La probabilidad de que ella obtenga la letra N en cualquier visita es 0,005 y es la misma de visita en visita. Sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que la señora Erika visita la tienda hasta obtener la letra N por primera vez. Encuentre:
    a. La función de probabilidad de X.
    b. La probabilidad de que la señora Erika obtenga la letra N por primera vez en la visita 25
    c. La probabilidad de que la señora Erika no tenga que visitar la tienda más de tres veces.
    d. El número esperado de veces que la señora Erika tendrá que ir a la tienda, antes de obtener la letra N.
23. Sea $X \sim U[0, 2\pi]$. Encuentre:
    a. La función de densidad de probabilidad de X.
    b. La función de distribución de X.
    c. $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$
    d. $P\left(-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$
24. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{dz} = \sqrt{2\pi}$. (Esta integral se debe resolver para probar que una función de densidad normal es efectivamente una función de densidad)

    Sugerencias: Note que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{dz} = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{dz}$. Haga el cambio $y = z^2$ y luego realice los pasos necesarios para escribir la integral resultante en términos de una función gamma $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} X^{n-1} e^{-x}\,dx$. Recuerde que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
25. Especifique la relación de:
    a. La variable aleatoria $\mathrm{Z} \sim \mathrm{N}(0,1)$ con la distribución gamma
    b. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mathrm{u}, \sigma^2)$ con la distribución chi-cuadrado
    c. Las variables aleatorias normales X y Y con la distribución cauchy
    d. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mathrm{u}, \sigma^2)$ con la distribución lognormal
    e. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{Gamma}(n, m)$ con la distribución chi-cuadrado
    f. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{Gamma}(n, m)$ con la distribución exponencial
    g. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ con la distribución uniforme
    h. La variable aleatoria $\mathrm{X} \sim \mathrm{Cauchy}(a, b)$ con la distribución t de student
26. Suponga que un profesor asume que la nota final de un estudiante en una materia es el valor de una variable aleatoria distribuida normalmente. Este profesor decide calificar con una mención "Sobresaliente" a aquellos estudiantes que su nota excede a $\mu + \sigma$, con "Excelente" a los estudiantes que su nota caiga entre μ y $\mu + \sigma$, con "Regular" si la nota cae entre $\mu - \sigma$ y μ, con "Deficiente" si la nota cae entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu - \sigma$, y con "Muy deficiente" si la nota está por debajo de $\mu - 2\sigma$. Encuentre el porcentaje de estudiantes con una calificación de:
    a. Sobresaliente b. Excelente c. Regular d. Deficiente e. Muy deficiente
27. Suponga que la variable aleatoria X que representa la resistencia (en libras) a romperse de cierto género de algodón, está distribuida normalmente con $E(X) = 170$ y $Var(X) = 16$. Además, una muestra aleatoria de este género de algodón se considera defectuosa si la resistencia es menor a ciento sesenta y seis libras, ¿Cuál es la probabilidad de que un algodón seleccionado al azar sea defectuoso?

28. Suponga que el tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico es una variable aleatoria con la siguiente función de distribución:

$$F_X^{(x)} = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{\frac{x}{1000}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que el componente electrónico sobreviva:

a. entre 200 y 400 horas
b. más de 600 horas
c. más de 800 horas, dado que ya ha sobrevivido 200 horas
d. ¿Qué puede comentar acerca la propiedad de pérdida de memoria que queda revelada en las respuestas anteriores?

Respuestas a la Guía de Ejercicios No. 1

3. 0,491
4. a. 0,8333 b. 0,6944 c. 0,59799 d. 0,03549
5. 220000 Bs.
10. $M_X^{(t)} = \frac{\frac{2}{6}e^t}{1-\frac{4}{6}e^t}$; $E(X) = 3$; $Var(X) = 6$.
11. 0,9881
13. a. 0,0683 b. 0,8023 c. 0,912
15. $(e^{-5})^{10}$
17. 0,75
20. a. 0,223 b. 0,042
21. 0,3011
22. b. 0,0044 c. 0,0149 d. 200 visitas
23. c. 1/6 d. 1/4
26. a. 15,87% b. 34,13% c. 34,13% d. 13,59% e. 2,28%
27. 0,1587
28. a. 0,1484 b. 0,5488 c. 0,5488

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 / 1071 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve