Tema 6

FLUJOS INTERNOS

Introducción

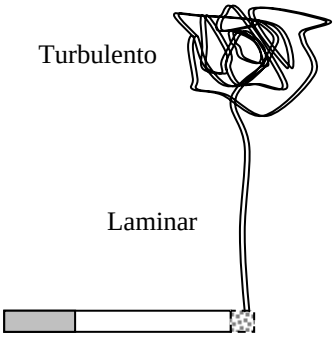
El objeto de este tema es el estudio de los flujos reales (viscosos) en el interior de conductos, ya sean circulares o de otras formas. Es decir todos aquellos flujos limitados por superficies sólidas.
Cuando se trata con flujos reales las fuerzas viscosas suelen tener una gran importancia ya que producen esfuerzos cortantes con el movimiento del fluido.

Flujo laminar y flujo turbulento

Los flujos viscosos se pueden clasificar en laminares y turbulentos, tendiendo en cuanta la estructura interna de flujo.
En un flujo laminar, la estructura del flujo se caracteriza por el movimiento en láminas o capas.
En régimen turbulento la estructura del flujo se caracteriza por movimientos tridimensionales aleatorios de las partículas de fluido, superpuesto al movimiento promedio.

Un parámetro muy importante en los flujos reales es el número de Reynolds, que se define como el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas, y se suele expresar como:

$$\mathrm{Re} = \frac{V\rho l}{\mu}$$



La importancia de este parámetro radica principalmente en el hecho de permitir definir si el flujo es laminar o turbulento. Esto ya que muchos estudios empíricos han permitido estimar, en función del número de Reynolds, el tipo de flujo que se tiene. Es así por ejemplo que se sabe que para números de Reynolds pequeños (Re<2000 en tuberías o Re<1500 en un canal abierto, considerándose Re=2300 como el punto de transición) se tendrán flujos laminares en cambio si se tienen números de Reynolds grandes se tendrán flujos turbulentos.

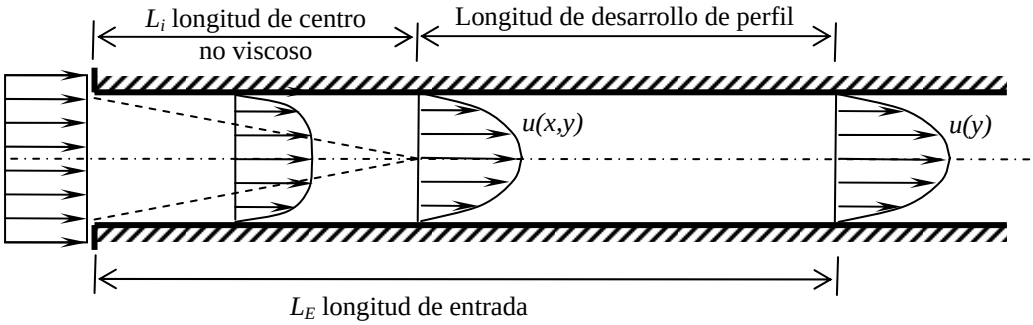
Existen pocos casos en la naturaleza de flujo laminar, un ejemplo particular es el flujo sanguíneo, y algunos sectores del flujos lentos como al inicio del movimiento de una columna de humo (humo del cigarrillo por ejemplo).

Un experimento clásico para mostrar las diferencias cualitativas entre el flujo laminar y el flujo turbulento es el inyectar un delgado filamento de tinta en un flujo. Cuando la velocidad del flujo es baja (bajo número de Reynolds) la tinta inyectada permanece en un solo filamento, porque el flujo es laminar, y no hay mezcla entre las diferentes capas de fluido. Mientras que para flujos altos (alto número de Reynolds) el filamento de tinta se vuelve inestable y se rompe en un movimiento aleatorio, la línea de tinta se estira y se tuerce y rápidamente se dispersa por todo el campo de flujo.

La solución de las ecuaciones de flujo pueden resolverse analíticamente para algunos casos sencillos de flujos laminares. Pero en el caso de flujo turbulento esto no es posible, por lo tanto se deberá confiar en teorías semiempíricas y datos experimentales.

Flujo de entrada y flujo desarrollado

Al ingresar un fluido en un conducto el flujo comienza a variar para adaptarse al conducto, en esta parte del conducto el perfil de velocidades del flujo varía en la dirección del flujo, y este se denomina flujo de entrada. Se dice que el fluido es completamente desarrollado cuando el perfil de velocidades del flujo deja de cambiar en la dirección del flujo.
Si idealizamos este flujo podremos observar que a la entrada el flujo se comporta como un flujo uniforme, luego aparece una capa de pared viscosa en las inmediaciones de la pared del tubo que crece a lo largo de la longitud del tubo, hasta que los esfuerzos viscosos dominan toda la sección del tubo, después el perfil sigue cambiando por efecto de los esfuerzos viscosos hasta obtener un flujo completamente desarrollado. La figura siguiente ilustra este fenómeno.



Este fenómeno es similar para flujos laminares o turbulentos, diferenciándose solo por las longitudes necesarias para obtener un perfil completamente desarrollado.
En el caso de un flujo laminar, por ejemplo se admite que si se trata de flujo en una tubería circular se obtiene el flujo completamente desarrollado para:

$$\frac{L_E}{D} = 0.065\,\mathrm{Re} \qquad \mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

Donde el número de Reynolds se basa en la velocidad promedio y el diámetro medio.
En el caso de un canal rectangular con alta relación de aspecto (ancho dividido entre la altura *h* entre placas superior e inferior) la longitud de entrada se puede calcular como:

$$\frac{L_E}{h} = 0.04\,\mathrm{Re} \qquad \mathrm{Re} = \frac{Vh}{\nu}$$

En el caso de flujos turbulentos se obtiene un flujo desarrollado cuando todas les características de flujo dejan de cambiar en la dirección del flujo. Esto implica que después de la región de núcleo no viscoso que termina en L_i, viene la región de desarrollo de perfil que termina en este caso en una longitud L_d, y finalmente se requiere una distancia adicional para que se desarrolle la estructura detallada del flujo turbulento que termina en L_E. En el caso de flujos en tuberías con Re > 10^5 las pruebas ha dado:

$$\frac{L_i}{D} \approx 10 \qquad \frac{L_d}{D} \approx 40 \qquad \frac{L_E}{D} \approx 120$$

Pero estas longitudes cambian mucho en función del número de Reynolds, es así que para el caso de Re=4000 estas longitudes pueden ser hasta 5 veces mayores a las mencionadas.

Flujo laminar

En esta sección se van a desarrollar las ecuaciones de flujo para flujo laminar en diversos conductos utilizando el enfoque elemental. El objetivo de esto es obtener una expresión para el perfil de velocidades completamente desarrollado, así como una expresión para el caudal, la caída de presión y el esfuerzo cortante.
Es de notar que se pueden obtener los mismos resultados integrando las ecuaciones de Navier-Stokes, sin embargo nos conformaremos con una sola forma de obtener estas ecuaciones.

Flujo laminar entre placas paralelas

Consideremos un flujo desarrollado, estable e incompresible entre dos placas paralelas, separadas una distancia *a* muy pequeña, donde la placa superior se mueve con velocidad *U*.

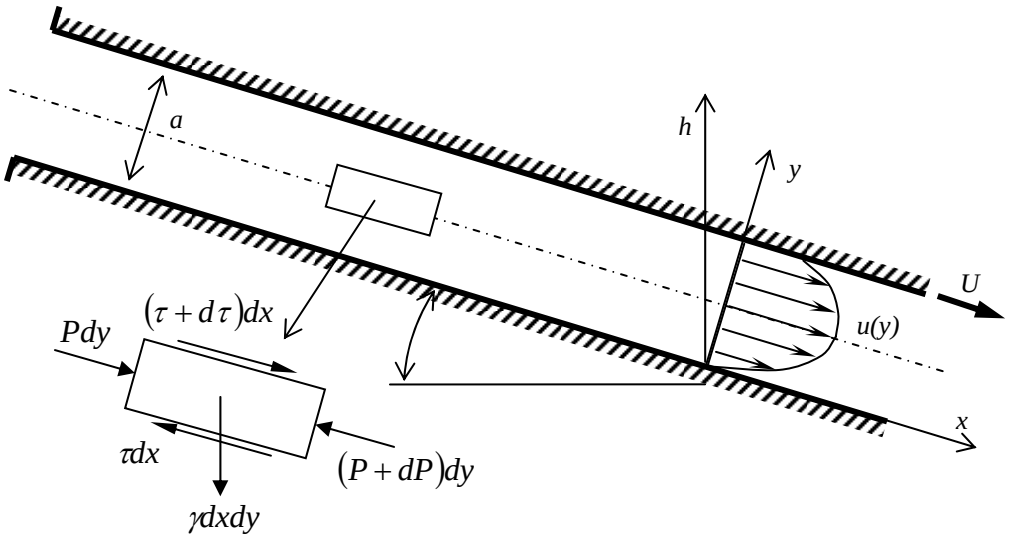
Perfil de velocidades

Tomamos un elemento diferencial volumétrico de profundidad unitaria en la dirección *z*, tal como se muestra en la figura siguiente. Haciendo un balance de fuerzas en la dirección *x* y, considerando que no hay aceleración del fluido, obtenemos:

$$Pdy - (P + dP)dy - \tau dx + (\tau + d\tau)dx + \gamma dxdy \sin\theta = 0$$

Como la distancia entre las dos placas es pequeña podemos despreciar la variación de presión en la dirección *y*, dividiendo toda la expresión entre *dxdy* obtenemos:

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dP}{dx} - \gamma \sin\theta$$



Como se trata de un esfuerzo unidimensional el esfuerzo cortante se puede expresar como:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

El ángulo por su lado se puede expresar como:

$$\sin\theta = -\frac{dh}{dx}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{d\left(\mu \frac{du}{dy}\right)}{dy} = \frac{dP}{dx} - \gamma\left(-\frac{dh}{dx}\right)$$

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dP}{dx} + \gamma \frac{dh}{dx} = \frac{d(P + \gamma h)}{dx}$$

Si dividimos la expresión entre μ e integramos dos veces obtenemos:

$$u(y) = \frac{y^2}{2\mu}\frac{d(P + \gamma h)}{dx} + C_1 y + C_2$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Si consideramos como condiciones de borde (frontera) que:

$$u = 0 \text{ en } y = 0$$

$$u = U \text{ en } y = a$$

Obtenemos:

$$C_1 = \frac{U}{a} - \frac{a}{2\mu}\frac{d(P + \gamma h)}{dx} \qquad B = 0$$

Obtenemos entonces la expresión para la distribución de velocidades:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d(P + \gamma h)}{dx}\left(y^2 - ay\right) + \frac{U}{a}y$$

Lo que implica que la distribución de velocidades es una parábola.
Si el movimiento se debe únicamente al movimiento de la placa el flujo se denomina flujo de Couette.

Cantidades de flujo

Si consideramos una simplificación del caso anterior donde $U = 0$, la expresión para el perfil de velocidades será:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\left(y^2 - ay\right)$$

Con esta expresión se puede obtener la razón de flujo por unidad de ancho:

$$Q = \int_0^a u dA = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\left(y^2 - ay\right)dy$$

$$Q = -\frac{a^3}{12\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

La velocidad promedio V es:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{a \times 1}$$

$$V = -\frac{a^2}{12\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

Adicionalmente es fácil, observar que la velocidad máxima ocurre para $y = a/2$:

$$u_{\max} = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{dP}{dx}$$

Por lo que la velocidad media está relacionada con la velocidad máxima por:

$$V = \tfrac{2}{3}u_{\max}$$

Pérdida de carga

A partir de la expresión para la velocidad promedio es posible obtener una expresión para la caída de presión, si consideramos que el cambio de presión por la diferencia de altura es despreciable (tubería horizontal), y consideramos que para una longitud L $\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$, por ser constante el diferencial de presión en un flujo desarrollado, obtenemos:

$$\Delta P = -\frac{12\mu V L}{a^2}$$

Se puede expresar el esfuerzo cortante como:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(2y - a)$$

En la pared donde $y = 0$ tenemos:

$$\tau = -\frac{a}{2}\frac{dp}{dx}$$

Lo cual implica que para una longitud L tenemos que la caída de presión será:

$$\Delta P = \frac{2\tau_0}{a}L$$

Si introducimos el factor de fricción definido como:

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} = \frac{8}{\rho V^2}\left(-\frac{a}{2}\frac{dP}{dx}\right) = \frac{48\mu}{\rho a V} = \frac{48}{\mathrm{Re}}$$

Considerando que:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho a V}{\mu}$$

Esta expresión se puede escribir, expresada en términos de pérdida de carga como:

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = f\,\frac{L}{2a}\frac{V^2}{2g}$$

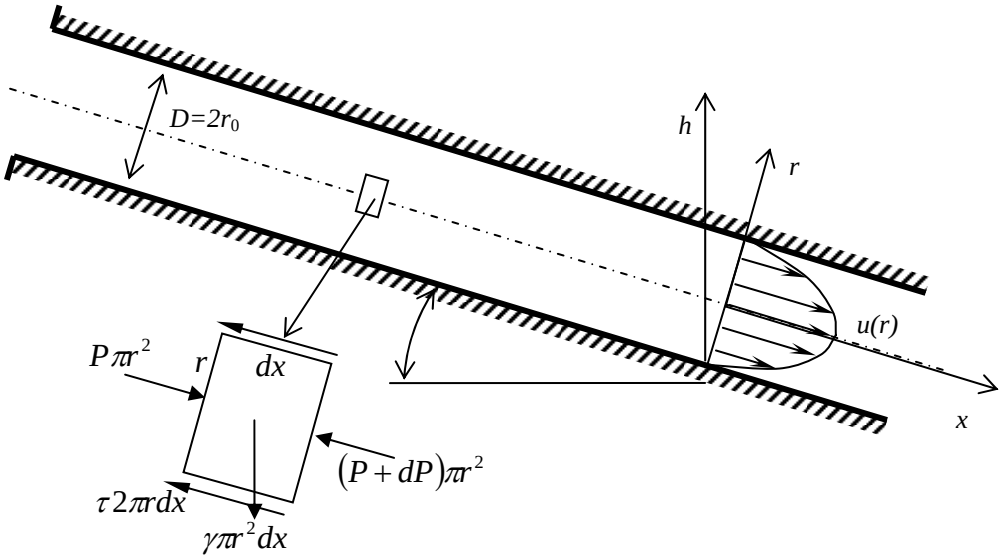
Que es una ecuación equivalente a la ecuación de Darcy-Weisbach para tuberías.
Observamos finalmente que la pérdida de carga en flujos laminares es directamente proporcional a la velocidad media.
Los cálculos realizados en esta sección son válido para flujos entre placas paralelas donde el ancho es mucho mayor que la separación entre las placas, en por lo menos un factor de 8, en caso contrario se requeriría añadir un esfuerzo cortante adicional por los efectos laterales.

Flujo laminar en un tubo

Consideremos un flujo desarrollado, estable e incompresible en un tubo de diámetro *D*.

Perfil de velocidades

Tomamos un elemento diferencial volumétrico cilíndrico de radio *r* y ancho *dx*, tal como se muestra en la figura siguiente.



Haciendo un balance de fuerzas en la dirección *x* y, considerando que no hay aceleración del fluido, por lo que no hay cambio del perfil en la dirección *x*, obtenemos:

$$P\pi r^2 - (P + dP)\pi r^2 - \tau 2\pi r dx + \gamma \pi r^2 dx \sin\theta = 0$$

Que tomando en cuenta que:

$$\sin\theta = -\frac{dh}{dx}$$

Se puede simplificar como:

$$\tau = -\frac{r}{2}\frac{d(P + \gamma h)}{dx}$$

Nótese que esta ecuación es válida tanto para flujos laminares como para flujos turbulentos.
Como el esfuerzo cortante se puede expresar en función de la viscosidad y el gradiente de velocidad, la ecuación se puede escribir como:

$$-\mu\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{d(P + \gamma h)}{dx}$$

Si integramos esta ecuación obtenemos:

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}\frac{d(P + \gamma h)}{dx} + A$$

Donde *A* es una constante de integración que se puede obtener con las condiciones de frontera, que en este caso son: en $u = 0 \quad r = r_0$.

La ecuación para el perfil de velocidades será entonces:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\left(r^2 - r_0^{\,2}\right)$$

Este representa un perfil parabólico que se conoce como **Flujo de Poiseuille.**

Cantidades de flujo

A partir de la expresión para el perfil de velocidades en el tubo se puede determinar la expresión para el caudal en la tubería:

$$Q = \int_0^{r_0} u(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\int_0^{r_0}\left(r^2 - r_0^{\,2}\right) r dr = \frac{\pi}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\int_0^{r_0} r^3 dr - r_0^{\,2} r dr$$

$$Q = \frac{\pi}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}\left(\frac{r^4}{4} - r_0^{\,2}\frac{r^2}{2}\right)_0^{r_0} = -\frac{r_0^{\,4}\pi}{8\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

Con el valor del caudal podemos obtener la velocidad media en la tubería:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_0^{\,2}} = -\frac{r_0^{\,2}}{8\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

También es posible obtener la velocidad máxima a partir de la ecuación del perfil de velocidades, en $r = 0$:

$$u_{\max} = \frac{r_0^{\,2}}{4\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

Observamos entonces que existe una relación entre la velocidad máxima y la velocidad promedio que es:

$$V = \tfrac{1}{2} u_{\max}$$

Pérdida de carga

A partir de la expresión para la velocidad promedio es posible obtener una expresión para la caída de presión, si consideramos que el cambio de presión por la diferencia de altura es despreciable (tubería horizontal), y consideramos que para una longitud *L* $\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$, por ser constante el diferencial de presión en un flujo desarrollado, obtenemos:

$$\Delta P = \frac{8\mu V L}{r_0^{\,2}}$$

Esta caída de presión se puede expresar en función del esfuerzo cortante tomando en cuenta que:

$$\tau = -\mu\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{d(P+\gamma h)}{dx}$$

Por lo tanto si $\tau = \tau_0$ en $r = r_0$, la caída de presión en una longitud *L* de tubería se puede expresar como:

$$\Delta P = \frac{2\tau_0 L}{r_0}$$

Introduciendo el factor de fricción *f*:

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} = \frac{8}{\rho V^2}\left(\frac{r_0}{2}\frac{\Delta P}{L}\right) = \frac{8}{\rho V^2}\left(\frac{r_0}{2}\frac{8\mu V}{r_0^{\,2}}\right) = \frac{64\mu}{\rho V 2 r_0} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

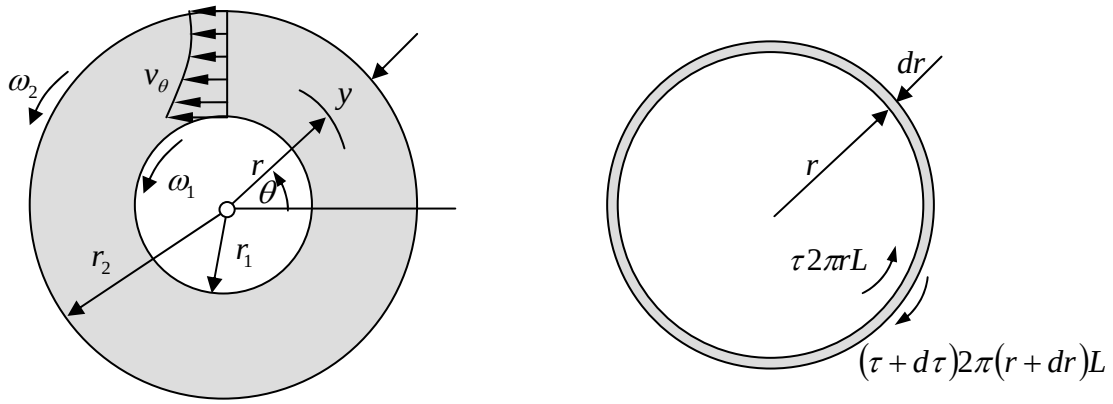
Con lo cual expresando la caída de presión como una pérdida de carga tenemos:

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Observamos finalmente que la pérdida de carga es directamente proporcional a la velocidad media en un tubería. Expresión aplicable a cualquier flujo laminar.

Flujo laminar entre cilindros giratorios

Consideremos un flujo desarrollado, estable e incompresible entre dos cilindros concéntricos giratorios como se muestran en la figura:



Donde las figuras muestran los dos cilindros concéntricos y el elemento diferencial cilíndrico de longitud L respectivamente.
Este caso particular es interesante porque corresponde al flujo entre un eje girando sobre un cojinete.

Perfil de velocidades

Despreciando las fuerzas volumétricas, o considerando que los cilindros son verticales, y haciendo sumatoria de torsores sobre un elemento diferencial cilíndrico de longitud L, obtenemos lo siguiente:

$$\tau 2\pi r L \times r - (\tau + d\tau)2\pi(r+dr)L \times (r+dr) = 0$$

Donde la longitud L debe ser grande comparadas con la separación entre los cilindros para evitar los efectos tridimensionales en los extremos. Esta ecuación se puede reducir a:

$$2\tau + r\frac{d\tau}{dr} = 0$$

Tomando en cuenta que:

$$\tau = -\tau_{r\theta}$$

$$\tau = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

Obtenemos:

$$-2\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) - \mu r \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right) = 0$$

Si dividimos entre μr, multiplicamos por dr e integramos obtenemos:

$$A = 2\frac{v_\theta}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta)$$

Si multiplicamos por rdr y volvemos a integrar obtenemos una expresión para la velocidad tangencial en función del radio:

$$v_\theta(r) = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r}$$

Donde *A* y *B*, son constantes de integración que se obtienen con las condiciones de frontera: $v_\theta = r_1\omega_1$ en $r = r_1$ y $v_\theta = r_2\omega_2$ en $r = r_2$, con lo cual el valor de las constantes de integración será:

$$A = 2\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \qquad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2}$$

Estas ecuaciones son válidas para números de Reynolds pequeños, Re < 1700 y siempre la velocidad del cilindro exterior sea cero. En este caso el número de Reynolds se calcula como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\omega_1 r_1 \delta}{\nu} \text{ donde } \delta = r_2 - r_1$$

Momento de giro

A partir de la expresión anterior es posible encontrar el valor del torsor necesario para girar el cilindro interior, considerando que el exterior está fijo. En este caso particular la velocidad se puede expresar como:

$$v_\theta = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - r\right)$$

El esfuerzo cortante sobre el cilindro interior es en este caso:

$$\tau_1 = -\left(\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right)_{r=r_1} = \mu\frac{2}{r_1^2}\frac{r_1^2 r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{2\mu r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

El momento torsor necesario para girar el cilindro será:

$$T = \tau_1 A_1 r_1 = \frac{2\mu r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}2\pi r_1 L r_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

La potencia requerida para girar el eje es:

$$\dot{W} = T\omega_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L\omega_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Esta es la potencia requerida para vencer la viscosidad del fluido, y por lo general genera calor en éste.

Ejercicios

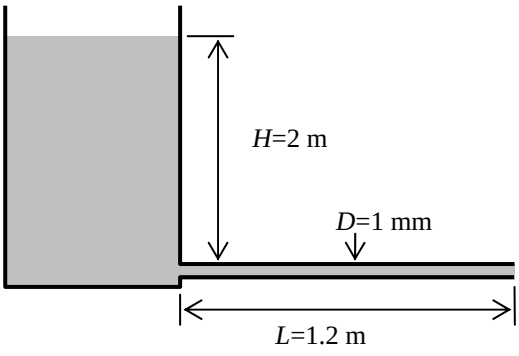
Ejercicio 1

Agua a 20ºC fluye entre placas horizontales con un ancho de 50 cm y separadas de 1.5 cm. El número de Reynolds es 1500. Calcule:

a) La razón de flujo
b) El esfuerzo cortante en la pared
c) La caída de presión e una distancia de 3m
d) La velocidad en *y* = 0.5 cm y la velocidad máxima.

Ejercicio 2

Un tubo horizontal de diámetro pequeño se conecta a un dispositivo de suministro como se muestra en la figura. Si en 10segundos se capturan 6600 mm^3 en la salida, calcule la viscosidad del agua.



Ejercicio 3

Un sistema hidráulico opera con una presión manométrica de 20 MPA y 55ºC. El fluido hidráulico es aceite SAE 10W. Una válvula de control se compone de un émbolo de 25 mm de

diámetro ajustado dentro de un cilindro con una separación radial media de 0.005 mm. Determine el flujo de fuga si la presión manométrica del lado de baja presión del émbolo es de 1 MPa. El émbolo tiene 15 mm de largo.

Ejercicio 4

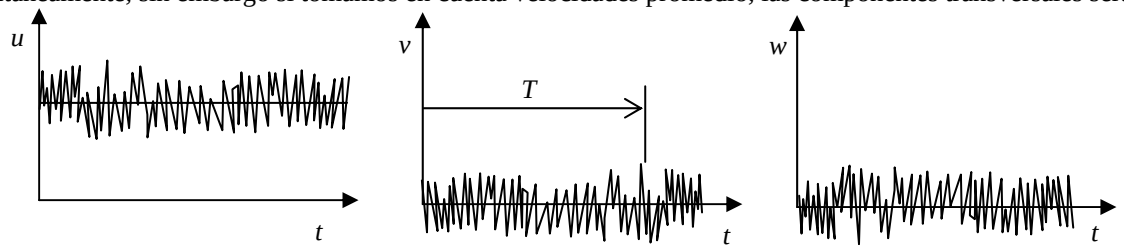
Es posible construir un viscosímetro sencillo y preciso a partir de un tramo de tubería capilar. Si se miden el flujo y la caída de presión, y se conoce la geometría del tubo, la viscosidad puede calcularse a partir de la ecuación del caudal. Una prueba de cierto líquido en viscosímetro capilar brindó los siguientes datos:
Flujo: 880mm^3/s; Longitud del tubo: 1 m; Diámetro del tubo: 0.5 mm; Caída de presión: 1 MPa.
Determine la viscosidad del líquido.

Ejercicio 5

Un cojinete de chumacera de cigüeñal en un motor de automóvil se lubrica por medio de aceite SAE 30 a 210ºF. El diámetro del cojinete es de 3 pulgadas y la separación diametral es de 0.0025 pulgadas, gira a 3600 rpm y su longitud es de 1.25 pulgadas. El cojinete no está sujeto a carga, por lo que la separación es simétrica. Determine el momento de torsión requerido para hacer girar el cojinete, así como la potencia disipada.

Flujo turbulento

Es muy importante el estudio del flujo turbulento porque la mayoría de las aplicaciones de ingeniería son flujos de este tipo. En este caso nos limitaremos al estudio del flujo en un tubo.
En flujo se considera turbulento en una tubería a partir de Re = 4000, entre 2000 y 4000 el flujo oscila entre laminar y turbulento. En un flujo de este tipo las tres componentes espaciales de la velocidad son diferentes de cero medidas instantáneamente, sin embargo si tomamos en cuenta velocidades promedio, las componentes transversales serán cero.



En la figura se observan las gráficas aproximadas de las tres componentes de velocidad en el tiempo, estas se pueden expresar como una función de la velocidad promedio en el tiempo ($\overline{V}$) y la variación de velocidad (V') para las tres componentes tendremos:

$$u = \overline{u} + u' \qquad v = \overline{v} + v' \qquad w = \overline{w} + w'$$

En donde la velocidad promedio temporal se define como:

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt$$

Donde T es un incremento de tiempo suficientemente grande para eliminar toda dependencia en el tiempo. Esto para cada una de las componentes. Debe notarse sin embargo que para las componentes transversales este suele ser cero ($\overline{u} \neq 0; \overline{v} = 0; \overline{w} = 0$)

Perfil de velocidades

Para obtener el perfil de velocidades en un flujo turbulento podemos utilizar el enfoque de partículas de fluido viajando en la tubería. En este caso debemos considerar que el esfuerzo cortante viscoso será de dos tipos:

- Un esfuerzo viscoso laminar que se puede obtener tal como se hizo para flujo laminar, pero tomado en cuenta velocidades promedio en la tubería, esto es:

$$\overline{\tau}_{lam} = \mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

- Un esfuerzo cortante turbulento que es producto del efecto de frenado del fluido cando una partícula de fluido pasa de una capa más lenta a una capa más rápida o aceleración del fluido cuando una partícula de fluido pasa de una capa más rápida a una capa más lenta, produciéndose así un intercambio de momentum. En este caso la expresión para el esfuerzo cortante será:

$$\tau_{turb} = \frac{dF}{dA} = -\rho u'v'$$

Que como por lo general se consideran valores promedios en vez de valores puntuales se utilizar el esfuerzo cortante promediado temporalmente denominado **esfuerzo cortante aparente**:

$$\bar{\tau}_{turb} = -\rho \overline{u'v'}$$

El esfuerzo cortante total en un flujo turbulento sería entonces la suma de los dos esfuerzos cortantes antes mencionados:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{lam} + \bar{\tau}_{turb} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

Por otro lado si tomamos la sumatoria de las fuerzas sobre un elemento cilíndrico de fluido, tal como el utilizado para el flujo laminar obtendremos que este esfuerzo debe ser igual a:

$$\bar{\tau} = -\frac{r}{2}\frac{d\bar{P}}{dx}$$

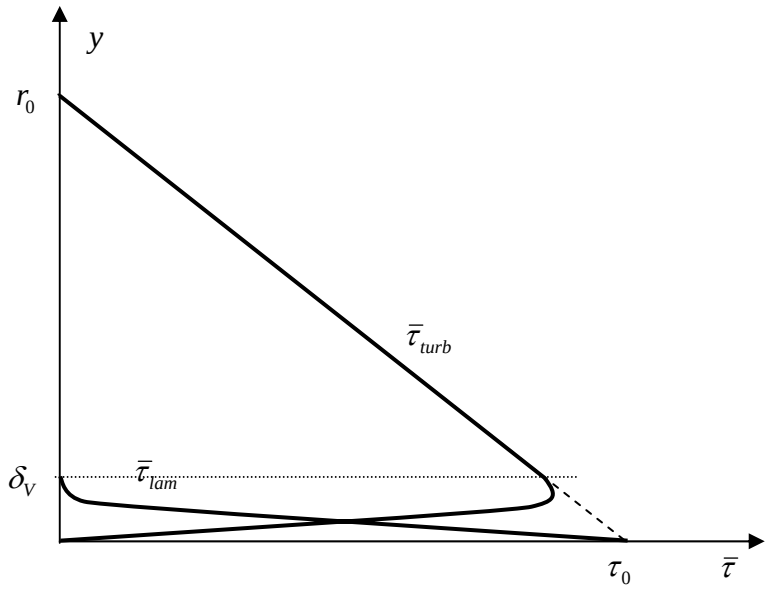
Igualando las dos expresiones tendremos:

$$-\frac{r}{2}\frac{d\bar{P}}{dx} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

Esta expresión muestra una función de la caída de presión como función de la velocidad, sin embargo no es muy útil en la práctica porque no es posible obtener una expresión analítica para $\overline{u'v'}$, por lo tanto se debe determinar una expresión empírica para este término, lo cual es equivalente a obtener directamente una expresión empírica para el perfil de velocidades, opción que escogemos para la continuación.

Rugosidad de la tubería

Los esfuerzos cortantes anteriormente calculados varían desde cero en la línea central hasta un valor máximo en la pared de la tubería tal como se muestra en la figura:



Observamos en la figura que el esfuerzo cortante laminar es importante solo en una parte muy delgada de la sección cerca de la pared de la tubería denominada capa de pared viscosa, con un ancho δ_V .

Esto hace que la rugosidad de la tubería tenga una influencia importante sobre la forma que tendrá el flujo en esta. Debido a que si la altura media de los elementos de aspereza *e* es superior a la capa de pared viscosa el esfuerzo cortante laminar no tendrá prácticamente influencia sobre el flujo, mientras que si este espesor es menor a la capa de pared viscosa entonces este esfuerzo tendrá más importancia sobre el flujo. En este último la aspereza no tiene mucha importancia sobre el flujo y se dice entonces que la tubería es hidráulicamente lisa. En definitiva se tendrán expresiones diferentes según la rugosidad de la tubería, diferenciándose entre tubería lisa y tuberías ásperas.

Es común representar la aspereza de una tubería en función de la denominada rugosidad relativa e/D.

Perfil de velocidad, Primer método

Existen varios métodos empíricos para determinar el perfil de velocidades en una tubería.
En el primer método el flujo en la tubería se divide en varias secciones:

- Una región de pared, dividida en una capa de pared viscosa que representa las zonas cercanas a la pared del tubo y una región turbulenta más cerca de la parte central del tubo, y una zona de amortiguación en el intermedio de las dos.
- Una región exterior que representa la pared del tubo.

Nótese que estas zonas de flujo se solapan en la sección de tubería y están representadas por expresiones distintas.

En una tubería lisa el perfil de velocidades en la región de pared se representa mediante la velocidad de corte definida por:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Y la longitud viscosa definida por ν / u_τ, donde ν, es la viscosidad cinemática.

En este caso el perfil de velocidades se representa en forma adimensional y se consideran dos secciones:

- Capa de pared viscosa: $\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad 0 \le \frac{u_\tau y}{\nu} \le 5$
- Región turbulenta: $\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 4.9 \qquad 30 < \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad \frac{y}{r_0} < 0.15$

Nótese que queda un intervalo no definido $5 < \frac{u_\tau y}{\nu} < 30$ denominado **zona de amortiguación,** donde los datos experimentales muestran resultados intermedios a las dos expresiones.

En tuberías ásperas la capa de pared viscosa no desempeña un papel importante y solo se requiere de una expresión logarítmica para determinar el perfil de velocidad en la región de pared:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 8.5 \qquad \frac{y}{r_0} < 0.15$$

Para la región exterior la expresión es la misma tanto para tuberías lisas como para tubería rugosas y las longitudes características son r_0 y el defecto de velocidad $(u_{\max} - \bar{u})$ expresado también en forma adimensional como:

$$\frac{u_{\max} - \bar{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{y} + 0.8 \qquad \frac{y}{r_0} \le 0.15$$

Como la región de pared y la región exterior se traslapan es posible combinar las expresiones anteriores y obtener una expresión para las velocidades máximas:

- Tubería lisa: $\frac{u_{\max}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau r_0}{\nu} + 5.7$
- Tubería áspera: $\frac{u_{\max}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{e} + 9.3$

Perfil de velocidad, Segundo método

Otra forma de definir el perfil de velocidad en una tubería en régimen turbulento es con el **perfil de ley de potencia,** que es un método relativamente más sencillo y viene expresado por:

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}$$

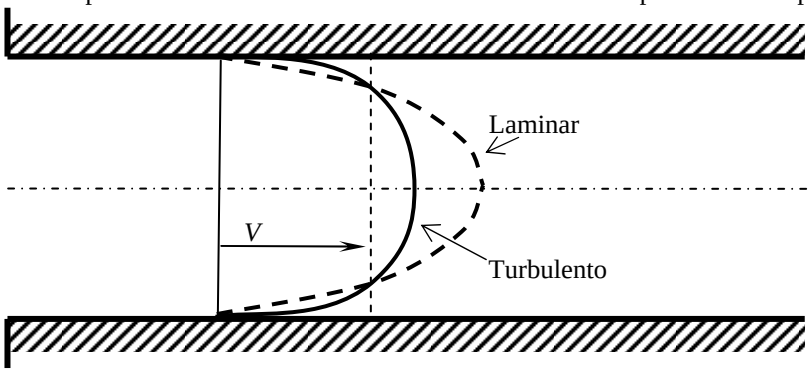
Donde *y* se mide desde la pared hasta el centro de la tubería y *n* es un entero entre 5 y 10 que depende del número de Reynolds y se puede relacionar con el factor de fricción como:

$$n = \frac{1}{\sqrt{f}}$$

En el caso de tuberías lisas el exponente *n* se puede determinar en función del número de Reynolds con la siguiente tabla:

Re	$4x10^3$	10^5	10^6	$>2x10^6$
n	6	7	9	10

Es de notar que este método tiene ciertas imprecisiones y no permite determinar el perfil ni en el centro del tubo en donde la pendiente debe ser cero, ni en las paredes del tubo donde se obtiene una pendiente infinita.
La figura siguiente muestra el perfil de velocidades obtenido con este método comparado con un perfil laminar:



Para este método se puede obtener la expresión siguiente para la velocidad promedio en la tubería:

$$V = \frac{\int_0^{r_0} \bar{u}(r) 2\pi r dr}{\pi r_0^{\,2}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_{\max}$$

Pérdida de carga

En el caso de flujo turbulento el cálculo de la pérdida de carga se realiza al igual que para flujos laminares mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

La diferencia radica en la forma de obtener el factor de fricción *f*, el cual en este caso se determina por métodos empíricos obtenidos mediante la utilización de parámetros adimensionales. En este caso sabemos que el factor de fricción *f* depende de los siguientes parámetros:

$$f = f(\rho, \mu, V, D, e)$$

En donde mediante un análisis dimensional obtenemos:

$$f = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{e}{D}\right) = f\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D}\right)$$

Donde *e/D* es la rugosidad relativa.
Los valores experimentales obtenidos para diferentes números de Reynolds y rugosidades relativas (aspereza relativa) se representan en le diagrama de Moody. En este diagrama se puede observar que el flujo se puede clasificar de 4 formas:

- Para números de Reynolds bajos (Re <2300) el flujo será **laminar**.
- A medida que aumenta el número de Reynolds aparece una zona llamada **zona crítica** en donde el flujo pasa de laminar a turbulento alternativamente.

- Y al principio del régimen turbulento existe una zona donde el factor de fricción cambia tanto con el número de Reynolds como con la rugosidad relativa llamada **zona de transición**.
- Finalmente aparece la **zona completamente turbulenta** donde para una rugosidad dada existe un Re por encima del cual el factor de fricción se vuelve constante.

También es posible utilizar la **ecuación empírica de Colebrook** que representa el diagrama de Moody en la zona de transición:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln\left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Esta ecuación se puede simplificar para las otras zonas del diagrama, así tenemos que para una **tubería lisa** $e = 0$ la ecuación se convierte en:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln \mathrm{Re}\sqrt{f} - 0.8$$

Y en la **zona completamente turbulenta** consideraremos que $\mathrm{Re} = \infty$ y la ecuación se convierte en:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln \frac{e}{3.7D}$$

Conductos de sección no circular

Es de notar que tanto el diagrama de Moody como la ecuación de Colebrook se obtuvieron para tuberías de sección circular, sin embargo estas pueden ser utilizadas para secciones transversales distintas utilizando el radio hidráulico *R* que se define como:

$$R = \frac{A}{P}$$

Donde *A* es el área de la sección transversal y *P* es el **perímetro mojado**, el cual corresponde al perímetro en el que el fluido está en contacto con la frontera sólida.

Como para el caso de una tubería circular completamente llena el radio hidráulico es $R = 2r_0$, entonces se deberá sustituir a r_0 por *2R* para utilizar el diagrama de Moody:

$$\mathrm{Re} = \frac{4VR}{\nu}$$

$$\text{rugosidad relativa} = \frac{e}{4R}$$

$$h_L = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g}$$

Coeficientes de rugosidad *e* para tuberías comerciales

Tipo de tubería	Rugosidad *e*	Tipo de tubería	Rugosidad *e*
Vidrio cobre o latón estirado	<0.001 (lisa	Hierro galvanizado	0.15 a 0.20
Latón industrial	0.025	Fundición corriente nueva	0.25
Acero laminado nuevo	0.05	Fundición corriente oxidada	1 a 1.5
Acero laminado oxidado	0.15 a 0.25	Fundición asfaltada	0.1
Acero laminado con incrustaciones	1.5 a 3	Cemento alisado	0.3 a 0.8
Acero asfaltado	0.015	Cemento bruto	Hasta 3
Acero roblonado	0.03 a 0.1	Duelas de madera	0.183 a 0.91
Acero soldado, oxidado	0.4		

Ejercicio 6

Agua fluye a 20ºC por una tubería de 10 cm de diámetro a una velocidad de 1.6 m/s. Si los elementos de rugosidad tienen 0.046 mm de altura, ¿la pared es lisa o rugosa?

Ejercicio 7

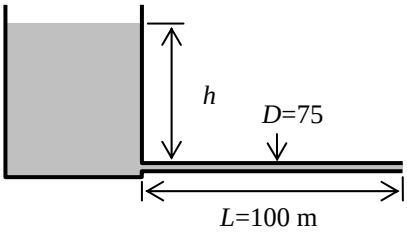
Una tubería horizontal lisa de 4 cm de diámetro transporta 0.004 m^3/s de agua a 20 ºC. Utilizando el perfil de ley de potencia, aproxime (a) el factor de fricción, (b) La velocidad máxima, (c) la posición radial donde $u = V$, (d) el esfuerzo cortante en la pared y € la caída de presión en un tramo de 10 m. (f) Calcule la velocidad máxima con el primer método de cálculo del perfil de velocidades.

Ejercicio 8

A través de una tubería horizontal de 150 mm de diámetro (e/D = 0.0002) fluye agua a 20ºC con un gasto volumétrico de 0.1 m^3/s. Determinar la caída de presión que corresponde a 10 m de longitud del tubo. Se puede suponer que el flujo es completamente desarrollado.

Ejercicio 9

¿Qué nivel h se debe mantener en el depósito de la figura para producir un gasto volumétrico de 0.03 m^3/s de agua? El diámetro interior del tubo liso es de 75 mm y la longitud del conducto es 100 m. El agua se descarga a la atmósfera. El efecto del cambio de sección sobre la caída de presión se puede despreciar.



Ejercicio 10

Un barreno que funciona a base de aire comprimido requiere un suministro de aire de 0.25 Kg/s a una presión manométrica de 650 KPa. La manguera que va del compresor al barreno tiene un diámetro interior de 40 mm. La presión manométrica máxima de descarga del compresor es 690 KPa. Despréciense los cambios de densidad y cualquier efecto ocasionado por la curvatura de la manguera. El aire comprimido sale del compresor a 40 ºC. Calcular la longitud más grande que se puede utilizar en la instalación.

Ejercicio 11

Las puntas de un aspersor de un sistema de riego agrícola se alimentan con agua mediante conductos de 500 pies, hechos de aluminio, desde una bomba operada por un motor. En el intervalo de operación de mayor rendimiento, la descarga de la bomba es 1500 gpm a una presión que no excede los 65 psig. Para una operación satisfactoria los aspersores deben operar a 30 psig o a una presión mayor. Se pueden despreciar los cambios de nivel y el efecto de los accesorios. Determinar el diámetro de la tubería estándar más pequeño que se pueda utilizar.

Ejercicio 12

Agua a 20 ºC se transporta 500 m por una tubería horizontal de hierro forjado de 4 cm de diámetro con una razón de flujo de 0.003 m^3/s. Calcule la caída de presión en el tramo de 500 m de tubería.

Ejercicio 13

Se mide una caída de presión de 700KPa en un tramo de 300 m de una tubería horizontal de hierro forjado de 10 cm de diámetro que transporta petróleo (DR = 0.9, $\nu = 10^{-5}$ m^2/s). Calcule la razón de flujo.

Ejercicio 14

Determine el diámetro de tubo estirado que debe escogerse para transportar 0.002 m^3/s de agua a 20 ºC una distancia de 400 m sin que la pérdida de carga exceda 30m.

Ejercicio 15

Se desea transportar aire en condiciones estándar por 500 m de ducto rectangular liso y horizontal de 30 cm x 20 cm con una razón de flujo de 0.24 m^3/s. Calcule la caída de presión.

Pérdidas menores en flujos por tuberías

Hasta ahora se ha aprendido a calcular las perdidas de carga que se producen en tuberías con flujos completamente desarrollados, estas se denominan comúnmente perdidas primarias o mayores. Sin embargo sabemos que el flujo no será completamente desarrollado en la tubería en toda su longitud, sino que después de cualquier accesorio (válvula, codos, ensanchamientos, contracciones, etc) existe lo que denominamos flujo de entrada en el cual el perfil de velocidades varía en el espacio. Esta variación puede darse por cambios de sección o cambios de dirección.
Esta variación en el flujo de la tubería, provoca también pérdidas las cuales se denominan comúnmente pérdidas menores o secundarias.
Estas pérdidas dependen principalmente de la geometría del accesorio y serán mayores a medida que los cambios de geometría sean mas bruscos y menores a medida que los cambios sean más suaves.
Las perdidas totales en una tubería serán iguales a la suma de las pérdidas primarias más las pérdidas secundarias:

$$h_L = h_P + h_S$$

La influencia de las pérdidas menores en las pérdidas totales de la tubería dependerá del número de accesorios y de las longitudes de tubería. Para sistemas con tramos rectos muy largos (>1000 diámetros, el ramal principal de un acueducto por ejemplo) las pérdidas menores son muy pequeñas comparadas a las pérdidas primarias, por lo cual estas se suelen despreciar. Para sistemas con longitudes de tuberías intermedias (50 diámetros, la distribución de agua dentro de una urbanización), las perdidas secundarias suelen tener magnitudes similares a las primarias. Cuando se esta en presencia de tramos de tuberías muy cortos las pérdidas secundarias suelen tener un magnitud superior a las pérdidas primarias.

Para calcular las pérdidas menores h_S en una tubería existen principalmente dos métodos, el método del coeficiente de perdidas secundarias K y el método de la longitud equivalente.

Método del coeficiente de pérdidas secundarias

En el método del coeficiente de pérdidas de carga secundarias, las pérdidas menores se expresan en función de un coeficiente de perdida de carga secundaria K de la forma siguiente:

$$h_S = K\frac{V^2}{2g}$$

En donde los valores del coeficiente de pérdida de carga secundaria K depende de la geometría del accesorio. Estos valores se determinan experimentalmente y se puede conseguir en tablas.

Método de la longitud equivalente

En el método de la longitud equivalente se considera cada accesorio como si se tratase de una longitud de tubería recta equivalente, lo cual incrementa en un cierto valor la longitud real de la tubería, para efectos del cálculo de las pérdidas de carga. De esta forma se calcularán las pérdidas menores de la misma forma que las pérdidas primarias, es decir con la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_S = f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2g}$$

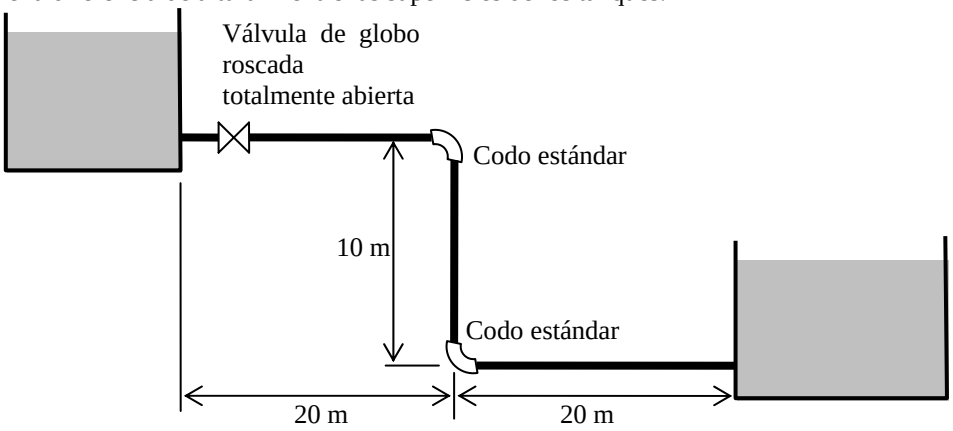
En realidad con este método se calculará directamente las pérdidas de carga totales como:

$$h_L = h_P + h_S = f\frac{(L+L_e)}{D}\frac{V^2}{2g}$$

De igual forma que en el primer métodos los valores de longitud equivalente se han obtenido experimentalmente para un gran número de accesorios y se pueden conseguir en tablas o nomogramas.

Ejercicio 16

Si la razón de flujo a través de la tubería de hierro forjado de 4” de diámetro nominal, que se muestra en la figura, es de 0.04 m^3/s, calcule la diferencia de altura *H* entre las superficies de los tanques.

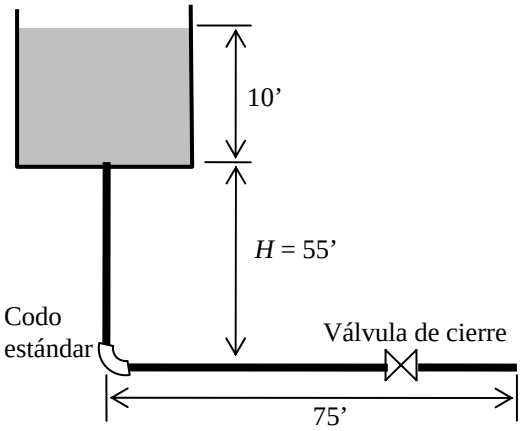


Ejercicio 17

Calcular el diámetro que debe tener la tubería de descarga del tanque elevado de la figura, para que se pueda tener un caudal de descarga de 1 pie^3/s. La tubería es de acero comercial y transporta agua con una densidad de 62.4 lbm/pie^3 y una viscosidad de $1x10^{-5}$ pie^2/s.

Ejercicio 18

Si el diámetro nominal de la tubería del problema 17 es de 2”, cual deberá ser el valor de la altura *H* del tanque para que tenga un caudal de 0.15 $pies^3/s$.



Ejercicio 19

Para el sifón de la figura, calcular el caudal de gasolina (DR = 0.75) descargado (en lts/s) si la tubería es de cobre extruído de 25 mm de diámetro y la presión P_A si éste descarga a presión atmosférica (100 KPa).

Ejercicio 20

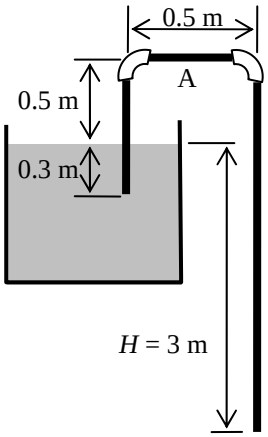
Par el mismo esquema del problema 19, cuál será la máxima altura *H* que puede emplearse para obtener el máximo caudal de gasolina sin que la presión absoluta sea inferior a 20 KPa.

Ejercicio 21

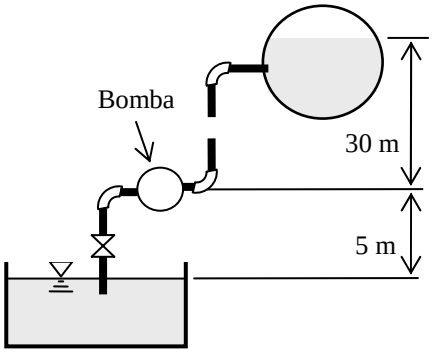
Que diámetro de tubería debe emplearse si se desea duplicar el caudal del problema 19

Ejercicio 22

Que altura *H* debe emplearse en el problema 19 si se desea duplicar el caudal con el mismo diámetro de tubería.

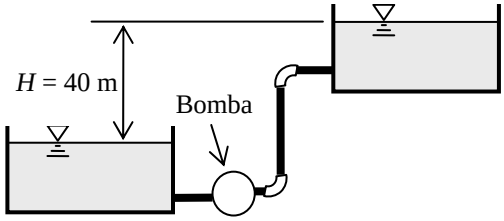


Ejercicio 23



El sistema de bombeo de la figura debe enviar 20 l/s al tanque elevado, donde la presión manométrica es de 300KPa. La tubería de succión tiene un diámetro de 10cm, una longitud de 8 m, es de acero comercial y tiene una entrada de borda, una válvula de retención y un codo de 90º. La tubería de descarga es de acero comercial con 5 cm de diámetro y 50 m de longitud, tiene dos codos de 90º y una salida. La bomba tiene una eficiencia del 70%.
Calcular la potencia que consume la bomba y las presiones manométricas a la entrada y salida de la bomba.

Ejercicio 24

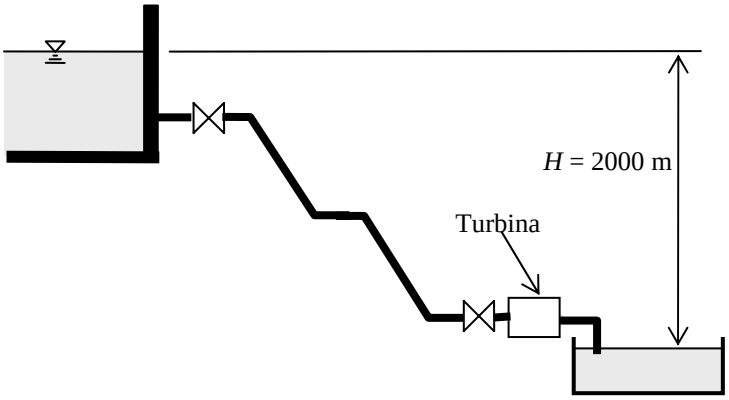


Que caudal de agua puede bombearse entre los dos tanques de la figura.
La tubería es de acero comercial de 50 mm de diámetro y posee una entrada una salida, dos codos estándar de 90º y tiene una longitud de 90m. La bomba es accionada por un motor de 23 KW y ésta tiene una eficiencia del 80%

Ejercicio 25

Que potencia de bombeo se requeriría para aumentar el caudal del problema 24 en 30%.

Ejercicio 26



La tubería del sistema hidráulico de la figura tiene 36” de diámetro y 10 Km de longitud total. Esta es de acero comercial y tiene una entrada, 2 válvulas de cierre, 4 codos de 45º, 1 codo de 90º y una salida.
Calcular el caudal de agua necesario para que la turbina de 95% de eficiencia produzca una potencia mecánica de 75 MW.

Ejercicio 27

Para el mismo esquema del problema 26, calcular el diámetro de tubería requerido para que la turbina (de 95% de eficiencia) genere 20MW con un caudal de 2 m^3/s.