TEORÍA DE CONTROL

Tema 6. Estabilidad de Sistemas

Introducción

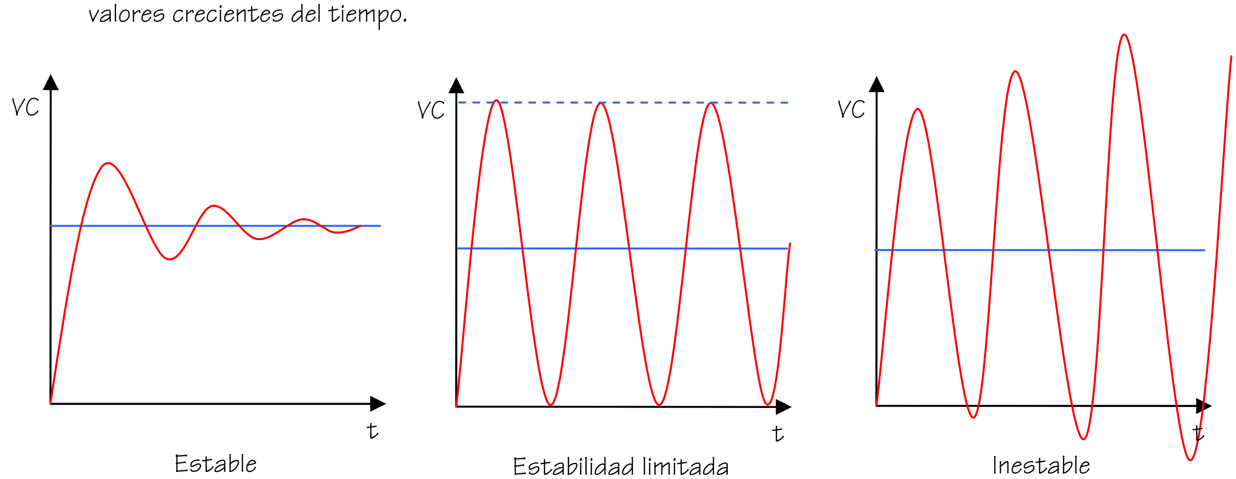
La noción de estabilidad es fundamental en el desarrollo de sistemas de control y en particular para los sistemas retroalimentados. La ausencia de esta propiedad vuelve inútil en la práctica a cualquier sistema.

Existen diversas formas de definir la estabilidad. Por ejemplo se puede hablar de la noción de estabilidad de un sistema autónomo que no es idéntica a la utilizada en sistemas sometidos a entradas y salidas (en donde la energía puede tener ciertos límites). También podemos referir que la estabilidad entre la entrada y la salida no necesariamente implica una estabilidad interna a los sistemas. Se puede hablar entonces de estabilidad local, global o semiglobal según el sistema no lineal en consideración.

Aquí nos vamos a interesar solamente a un tipo de estabilidad, utilizada para una clase de sistemas específicos, entre los que se encuentran los sistemas LTI, la cual es la descripción de estabilidad entrada salida, la cual nos lleva a la definición de estabilidad de entradas y salidas limitadas, comúnmente denominada estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Definiciones de estabilidad BIBO

1. Un sistema es estable si responde en forma limitada a una excitación limitada.
2. Un sistema estable es aquel en que los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes del tiempo.



Tal consideración sugiere que los coeficientes de t en los términos exponenciales de la respuesta transitoria sean números reales negativos o números complejos con parte real negativa.
Esto implica que para que un sistema sea estable las raíces de la ecuación característica deben ser negativas o con parte real negativa. Esto es ya que la ecuación característica representa la parte transitoria (homogénea) de la ecuación que rige el sistema.
De lo anterior podemos observar que la estabilidad no depende de la entrada sino que es una característica propia del sistema.

Ejemplo 1. Para un sistema de primer orden la ecuación característica es:

$$\tau D + 1 = 0$$

La solución transitoria es de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Este será estable siempre que la constante de tiempo sea positiva.

Para un sistema de segundo orden:

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n{}^2 = 0$$

La solución transitoria es de la forma:

Si $\xi > 1$ aparecen dos raíces reales positivas.

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ aparecen dos raíces reales iguales.

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ aparece un par de raíces imaginarias.

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Si $\xi = 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t$$

Si $\xi < 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = e^{\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Solo en este último caso el sistema será inestable, ya que el coeficiente de t en el exponencial es positivo, luego los transitorios aumentan en el tiempo.

Estabilidad limitada

Es el caso que sirve de frontera entre l estabilidad absoluta y la inestabilidad, y se presenta cuando las raíces de la ecuación característica tienen partes reales iguales a cero.
La respuesta resulta ser una oscilación permanente cuya amplitud ni crece ni decae en el tiempo.
Esto es el caso de $\xi = 0$ para un sistema de segundo orden por ejemplo.

Conclusión

De todo lo anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. Un sistema es estable si todas la raíces de la ecuación característica son negativas o con parte real negativa.
2. Un sistema es inestable, si tiene en su ecuación característica alguna raíz positiva o con parte real positiva.
3. Un sistema tiene estabilidad limitada si alguna de sus raíces son pares de imaginarios puros. Una raíz cero no influye sobre la estabilidad porque la respuesta no es oscilatoria.
4. Si el polinomio de la ecuación característica tiene algún coeficiente ausente o negativo entonces el sistema es inestable.

Ejemplo 2. Algunas ecuaciones características

1. $(D+1)(D+2)(D+3)=0$ Es estable porque todas las raíces son negativas
2. $(s+1)(s+2)(s-3)(s^2+4)=0$ Inestable por tener una raíz positiva
3. $(s+1)(s^2-4)=0$ Inestable por tener una raíz positiva (+2)
4. $(s^2+4)(s^2+16)=0$ Estabilidad limitada ya que tiene dos pares de raíces imaginarias puras
5. $(s^2+16)(s+1)=0$ Estabilidad limitada. Ya que el exponencial domina sobre la otra función y no hay ninguna raíz positiva, ni con parte real positiva. Los exponenciales siempre dominan sobre los cosenos y senos.

6. $(s^2+2s-8)(s+2)(s^2+1)=0$ Que es lo mismo que: $(s+4)(s-2)(s+2)(s^2+1)=0$ Es inestable por poseer una raíz positiva.

Para hallar la estabilidad de cualquier sistema, se pueden utilizar métodos para facilitar la operación, Ya que en algunos casos si el polinomio es de orden elevado será poco práctico encontrar las raíces. Entre los métodos más sencillos para determinar la estabilidad están:

- Criterio de Routh
- Criterio de Hurwitz
- Criterio de la fracción continuada

Estos métodos sirven para hallar la estabilidad de ecuaciones características en forma de polinomios. Existirán además métodos más complejos para determinar la estabilidad a otros sistemas y obtener mayor información.

Criterio de Estabilidad Routh

Es un método que sirve para determinar si la ecuación característica tiene o no raíces con parte real positiva sin necesidad de determinar el valor preciso de estas raíces. Y sirve para determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es de orden *n* y de la forma:

$$a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = 0 \text{ en el dominio del tiempo}$$

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \text{ en el dominio del Laplace}$$

Y esta se aplica usando la tabla de Routh

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-3} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-4} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Donde:

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$: son los coeficientes de l ecuación característica.

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}};\ b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}};\ b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1};\ c_1 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1};\ \text{etc.}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta que solo se obtengan ceros.

El criterio de Routh dice que:

1. Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh tienen todos el mismo signo.
2. De lo contrario el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo.
3. Si existe un cero no terminal el sistema tiene un par de raíces imaginarias puras.
4. Si existen ceros terminales implica una raíz cero.

Observaciones al criterio de Routh

1. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es cero se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
2. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es negativo se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
3. Todos los elementos de una fila cualquiera pueden multiplicarse o dividirse por una constante no negativa sin que se perturben las propiedades de la tabla.
4. Si el primer valor de una fila es cero, mientras que los otros valores no lo son el procedimiento consiste en sustituir el cero por un ε pequeño y positivo, y se continua el arreglo.

Ejemplo 3.

Para el sistema:

$$s^3+6s^2+12s+8=0$$

La tabla de Routh será:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 6 & 8 & 0 \\ s & 32/3 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Como en la primera columna no hay cambios de signo entonces el sistema tiene 3 raíces negativas o con parte real negativa y por lo tanto es estable.

Ejemplo 4.

Si se tiene la siguiente primera columna de Routh determinar todas las conclusiones posibles:

$$\begin{array}{c|c} s^5 & 2 \\ s^4 & 3 \\ s^3 & 4 \\ s^2 & -5 \\ s & 2 \\ s^0 & 0 \end{array}$$

El sistema tiene dos raíces positivas o con parte real positiva porque hay dos cambios de signo.
El sistema tiene una raíz cero por el cero terminal.
Hay dos raíces negativas o con parte real negativa.
El sistema es de quinto orden.
Por lo tanto es inestable.

Ejemplo 5.

Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

$$\begin{array}{c|c} s^4 & 3 \\ s^3 & 2 \\ s^2 & 5 \\ s & 0 \\ s^0 & 2 \end{array}$$

El sistema es de orden 4, posee 4 raíces.
No tiene cambios de signo, luego no tiene raíces positivas.
Posee u par de raíces imaginarias puras.
Posee un par de raíces negativas o con parte real negativa.
El sistema tiene estabilidad limitada por el cero no terminal.

Ejemplo 6.

Haga un estudio de la estabilidad del siguiente sistema usando el criterio de Routh

$$D^5x+3D^4x+7D^3x+20D^2x+6Dx+15x=u$$

El primer paso es entonces el construir la tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} s^5 & 1 & 7 & 6 & 0 \\ s^4 & 3 & 20 & 15 & 0 \\ s^3 & 1/3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 11 & 15 & 0 & \\ s & 6/11 & 0 & & \\ s^0 & 15 & 0 & & \end{array}$$

La primera columna de la tabla de Routh no posee cambios de signo luego todas sus raíces son negativas o con parte real negativa, por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 7.
Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

$$\begin{array}{c|c} s^{10} & 3 \\ s^9 & 2 \\ s^8 & 5 \\ s^7 & 4 \\ s^9 & -3 \\ s^5 & 2 \\ s^4 & 0 \\ s^3 & 1 \\ s^2 & 0 \\ s & 2 \\ s^0 & 0 \end{array}$$

El sistema es de orden 10
Tiene una raíz cero
Tiene dos raíces imaginarias puras
Tiene un par de raíces positivas o con parte real positiva
Es inestable por poseer un cambio De signo

Ejemplo 8.
Determinar, con el criterio de Routh, la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es:

$$s^4 + s^3 - s - 1 = 0$$

La tabla de Routh será:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & -1 \\ s^3 & 1 & -1 & 0 \\ s^2 & 1 & -1 & 0 \\ s & \varepsilon & 0 & \\ s^0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1$$

Por lo tanto el sistema es inestable.
Sin embargo el cálculo de la tabla no era necesario ya que la ecuación característica posee dos coeficientes negativos y hay uno ausente, se podría concluir directamente que el sistema es inestable.

Ejemplo 9.
Determinar la estabilidad del siguiente sistema:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 = 0$$

Le tabla de Routh es:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 6 & 3 \\ s^3 & 0 \to \varepsilon & 7/2 & 0 \\ s^2 & -\infty & 3 & 0 \\ s & 7/2 & 0 & \\ s^0 & 3 & 0 & \end{array}$$

Le sistema es inestable.

Criterio de estabilidad de Hurwitz

Este criterio es otro método para determinar si todas las raíces de una ecuación característica tienen partes reales negativas.

Este criterio se aplica por medio del uso de determinantes formados con los coeficientes de la ecuación característica. Estos determinantes Δ_i (con i = 1, 2, … n-1) se forman con los menores principales del determinante siguiente:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_0 \end{vmatrix}$$

Más específicamente los determinantes se forman de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix};\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix};\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a Δ_n donde n es el orden de la ecuación característica del sistema.

El criterio de Hurwitz dice que dice que todas las raíces de la ecuación característica serán negativas o con parte real negativa si los determinantes son positivos ($\Delta_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots n$).

Por supuesto al igual que para el criterio de Routh si existe algún coeficiente ausente o negativo en la ecuación característica se puede concluir que el sistema es inestable y no es necesario aplicar el método.

Ejemplo 10. Determinar la estabilidad del sistema siguiente usando el criterio de Hurwitz:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4to orden:

$$\Delta_1 = a_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3{}^2 - a_4 a_1{}^2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0\left(a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3{}^2 - a_4 a_1{}^2\right)$$

Por lo tanto el sistema será estable si:

$$a_3 > 0$$
$$a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$$
$$a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3{}^2 - a_4 a_1{}^2 > 0$$
$$a_0\left(a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3{}^2 - a_4 a_1{}^2\right) > 0$$

Ejemplo 11. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 3 por ser el sistema de 3er orden:

$$\Delta_1 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112$$

Como todos los determinantes son positivos entonces el sistema es estable.

Ejemplo 12. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$8s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4to orden:

$$\Delta_1 = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -107$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_3 = -535$$

El sistema es inestable por tener determinantes de Hurwitz negativos.

Análisis de estabilidad de sistemas en Espacio de Estado

En un sistema expresado en forma de espacio de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

La estabilidad depende de lo "*Valores Propios*" de la matriz A de n por n elementos. Esto ya que es la matriz A la que representa el sistema en si, por lo tanto donde se encuentra la información de la ecuación característica.

- Si todos los valores propios son negativos o con parte real negativa entonces el sistema será estable
- Si existe un par de valores propios imaginarios puros el sistema tendrá estabilidad limitada
- Si existe algún valor propio positivo o con parte real positiva el sistema será inestable

Determinación de los valores propios de una matriz

Los valores propios de una matriz son las raíces de la ecuación característica representada por esta matriz.
Por lo tanto para obtener los valores propios de una matriz se deben obtener primero la ecuación característica que se puede obtener con la expresión:

$$|sI - A| = 0$$

Y obtener luego las raíces de ésta ecuación que serán sus valores propios.
Par determinar la estabilidad del sistema se podrán aplicar entonces los criterios de Routh o Hurwitz a esta ecuación característica.

Por ejemplo:
Si se tiene un sistema lineal cuya matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema será:

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Por lo tanto los valores propios de la matriz A serán:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

Lo cual indica que este sistema es estable.

Ejercicios

1. Determinar si los siguientes sistemas son estables (utilice los dos criterios):
   a. $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$
   b. $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$
   c. $s^3 + 7s^2 + 7s + 46 = 0$
   d. $s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 9s + 12 = 0$
   e. $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = 0$
   f. $D^6x + 2D^5x + 4D^4x + 6D^3x + 8D^2x + 4Dx + 5x = u$

2. Citar razonablemente toda la información suministrada por las siguientes primeras columnas de Routh:

a.	b.	c.	d.	e.
2	2	1	1	2
3	3	2	2	3
4	4	3	-3	4
5	5	4	-4	5
0	0	0	5	6
6	6	5	6	7
-7	7	0	7	
0	0	6		
	0	-8		

3. Hallar el valor o el rango de valores de K para que los siguientes sistemas sean estables (utilice los dos criterios):
   a. $3s^3 + 3s^2 + s + K + 2 = 0$
   b. $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$
   c. $s^3 + (4+K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$
   d. $3s^4 + 2s^3 + Ks^2 + s^2 + s + 2 + K = 0$
   e. $s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + Ks^3 + s + K = 0$

4. Determine la estabilidad de los sistemas representados por las siguientes matrices de estado:
   a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Obtenga la representación canónica de Jordan para los sistemas anteriores.
6. Determine el valor de K para que los siguientes sistemas sean estables
   d. $A = \begin{bmatrix} K+2 & 0 & 0 \\ 0 & K+1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   e. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\left(\frac{K+2}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(4+K) & -6 & -8(2+K) \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$