Una Técnica de Diseño de Observadores para Sistemas con Perturbaciones

Addison Ríos-Bolívar* **Ferenc Szigeti***

Universidad de Los Andes
Facultad de Ingeniería
*Departamento de Control
Av. Tulio Febres Cordero
Mérida 5101 - Venezuela
e-mail: ilich@ing.ula.ve, szigeti@ing.ula.ve

Abstract

Se propone una técnica de diseño de observadores robustos para sistemas lineales perturbados mediante la extensión del observador clásico de Luenberger al considerar la salida del sistema y sus derivadas sucesivas. El método conduce a derivar una dinámica en el error de estimación asintóticamente estable, a pesar de las perturbaciones presentes en el sistema. Se consideran tanto los sistemas a tiempo continuos como los a tiempo discreto.

Palabras Claves. Observadores Robustos, Observador de Luenberger, Sistemas con Perturbaciones, Observadores Generalizados.

1 Introducción

En general, los sistemas dinámicos están sometidos a perturbaciones externas que tratan de llevarlos a estados no deseados. Para solventar este problema se deben diseñar controladores robustos, los cuales permiten conducir los sistemas a los estados deseados, aún bajo la presencia de tales perturbaciones.

En el caso de los estimadores de estados, tal situación es similar, se deben sintetizar observadores robustos en el entendido de que el efecto de las perturbaciones externas sea mínimo con respecto al error de estimación.

La consideración inicial en el diseño de observadores de estados para sistemas lineales con señales de perturbación estocásticas está basada en el Filtro de Kalman, el cual, bajo ciertas condiciones sobre la correlación de los procesos ruidosos, proporciona un excelente estimado del estado, [1].

Otra técnica en el diseño de observadores robustos es propuesta por H. Sira *et al.*, [8], donde se utilizan los modos deslizantes y condiciones de acoplamiento.

Por otro lado, en [7] se propone un método para el diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas en sistemas perturbados basado en el observador de Luenberger. Este método permite establecer las premisas fundamentales para la construcción de observadores robustos en sistemas lineales.

En particular, el problema que trataremos consiste en considerar los sistemas lineales con perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= Cx(t); \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\omega(t) \in \Re^q$ son las perturbaciones, $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^m$, $y(t) \in \Re^p$ y A, B_1, B_2, C son matrices de dimensiones apropiadas. La idea es de disponer de estimadores de estados, $\hat{x}(t)$, tal que para el error de estimación, $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ el efecto de las señales de perturbación, $\omega(t)$ sea mínimo. En términos de un filtrado óptimo en $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, debemos diseñar observadores tal que

$$||T_{e\omega}||_\infty = \sup_{\omega} \frac{||e(t)||_2}{||\omega(t)||_2} < \gamma,$$

donde $T_{e\omega}$ es la función de transferencia derivada entre el error de estimación y las perturbaciones.

En el método que se propone, bajo ciertas condiciones es posible suprimir completamente el efecto de las señales de perturbación en el error de estimación, mediante el diseño de los observadores extendidos de Luenberger al emplear la salida y sus derivadas.

2 Observadores Robustos: Caso Continuo

Consideremos el sistema dado en (1). Se asume que el par (C, A) es observable, por lo tanto, sea un observador de Luenberger dado por

$$\dot{\hat{x}}(t) \quad = \quad A\hat{x}(t) + B_2u(t) + \mathcal{D}(y(t) - C\hat{x}(t)). \tag{2}$$

Así, la dinámica del error de estimación corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - \mathcal{D}C)e(t) + B_2\omega(t) \\ \eta(t) &= Ce(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Nótese presencia de la perturbación en la dinámica del error lo cual no garantiza un comportamiento asintóticamente estable al cero del mismo.

Consideremos ahora que para la síntesis del estimador de estados se emplea una nueva salida constituída por la salida original y su derivada, esto es,

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ CB_1 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ CB_2 \end{pmatrix} u(t)$$

Con esta nueva salida y su equivalente estimada, dada por

$$\hat{\mathcal{Y}}(t) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ CB_2 \end{pmatrix} u(t),$$

el observador de estado estará definido por la dinámica

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2u(t) + \mathcal{D}(\mathcal{Y}(t) - \hat{\mathcal{Y}}(t)). \tag{4}$$

Así, la dinámica del error corresponderá a

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \left[A - \mathcal{D}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}\right] e(t) + \left[B_1 - \mathcal{D}\begin{pmatrix} 0 \\ CB_1 \end{pmatrix}\right] \omega(t), \\ \eta(t) &= Ce(t). \end{aligned} \tag{5}$$

De esta última ecuación, si se diseña $\mathcal{D}$ apropiadamente, entonces es posible evitar el efecto de las perturbaciones en el error de estimación, asegurando además un comportamiento asintóticamente estable. Esto se sintetiza en el siguiente teorema:

Teorema 1: *Consideremos el sistema dado por (1) con (C, A) observable y supóngase que*

$$Ker(CB_1) = 0,$$

entonces existe un observador de estado robusto como en (4), con ganancia $\mathcal{D} = (D_1 \quad D_2)$, tal que:

1.

$$\left[B_1 - \mathcal{D}\begin{pmatrix} 0 \\ CB_1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

2. Si el par $(C, (I - D_2C)A)$ *es observable entonces la matriz*

$$\left[A - \mathcal{D}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}\right]$$

será asintóticamente estable.

El Teorema 1 nos garantiza el rechazo a las perturbaciones externas y una dinámica asintóticamente estable en el error de estimación.

Prueba. Sea $\mathcal{D} = (D_1 \quad D_2)$; tenemos que

$$\left[B_1 - \mathcal{D}\begin{pmatrix} 0 \\ CB_1 \end{pmatrix}\right] = (I - D_2C)B_1.$$

Puesto que $\mathrm{Ker}(CB_1) = 0$, entonces existe un D_2 tal que

$$B_1 \in \mathrm{Ker}(I - D_2C).$$

Por otro lado

$$\left[A - \mathcal{D}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}\right] = A - D_1C - D_2CA;$$

y por cuanto el par $(C, (I - D_2C)A)$ es observable, entonces existe un D_1 tal que la matriz dinámica para el error de estimación es asintóticamente estable.

El procedimiento de diseño del observador robusto se sigue, en primer lugar, seleccionando adecuadamente D_2 a fin de rechazar la perturbación, y posteriormente, en base a D_1, se busca que la matriz dinámica resultante para el error, tenga todos sus autovalores en el semi-plano izquierdo del plano complejo.

2.1 Ejemplo Numérico

Sea el sistema diámico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Redifiniendo la salida, al considerar la derivada de la misma, y diseñando el observador, por ejemplo, con

$$D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -9 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} e(t) \\ \eta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e(t). \end{aligned}$$

En las Fig. 1 y Fig. 2 muestran los resultados de las simulaciones, bajo **Matlab/Simulink**, para un $u(t) = 0$. Se puede observar el comportamiento asintótico estable en la dinámica del error, el cual, por la naturaleza del sistema escogido para el ejemplo, se mantiene acotado alrededor del cero, a pesar de la presencia de la perturbación.

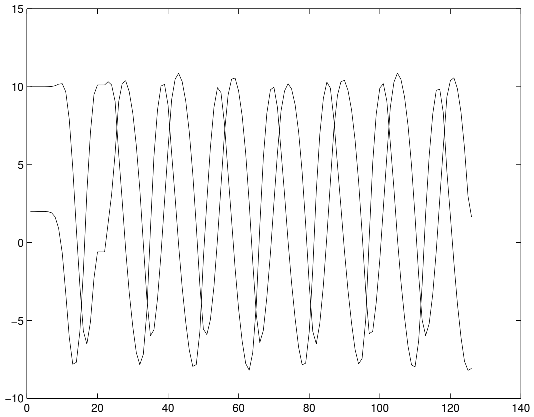

Fig. 1: Salida del Sistema.

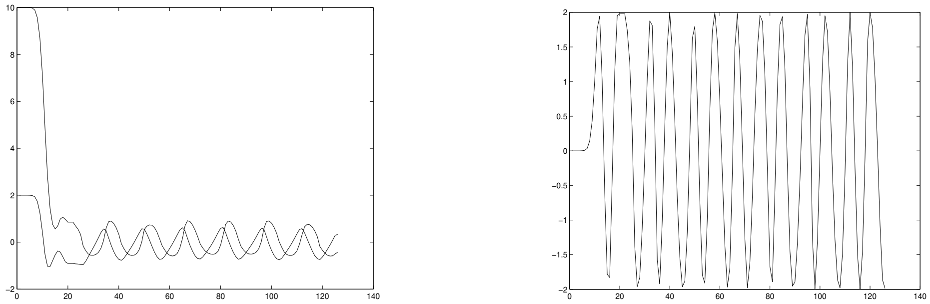

Fig. 2: Señales de Error y de Perturbación.

3 Observadores Robustos: Caso Discreto

En el caso de los sistemas a tiempo discreto, el diseño de los observadores robustos tienen una connotación análoga al caso de los sistemas a tiempo continuo. Las condiciones para el rechazo pleno de las perturbaciones son similares a las dadas en el Teorema 1.

Sea el sistema discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1\omega_k + B_2u_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{7}$$

donde, nuevamente, ω_k representa las perturbaciones. Si el par (C, A) es observable y si $\mathrm{Ker}(CB_1) = 0$, entonces es posible diseñar un observador robusto, en el sentido de rechazar las perturbaciones respecto a la dinámica del error, siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado para el caso de los sistemas continuos.

Los resultados que se derivan para el caso de los sistemas a tiempo discreto pueden ser resumidos en un teorema similar al presentado, cuya demostración se lleva a cabo en los mismos pasos que en el caso continuo presentado.

3.1 Ejemplo Numérico

Consideremos el sistema discreto dado por:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -0.1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_k + \begin{pmatrix} 0.337 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k.$$

Por analogía, se calcula $\mathcal{D}$ de tal manera que para, por ejemplo,

$$D_1 = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

se obtiene, para la dinámica del error de estimación, lo siguiente:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} e_k, \\ \eta_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e_k. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso continuo, con la selección adecuada de la ganancia del observador robusto, se rechazan completamente las perturbaciones en la dinámica del error y, al mismo tiempo, se logra un comportamiento asintóticamente estable de dicho error.

Las Figs. 3 y 4 muestran los resultados de las simulaciones para el caso en estudio.

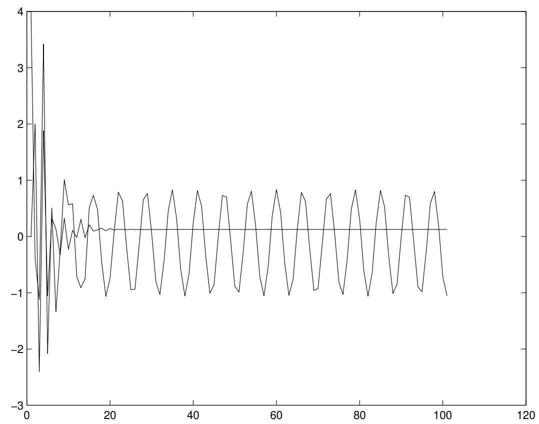

Fig. 3: Salida del Sistema.

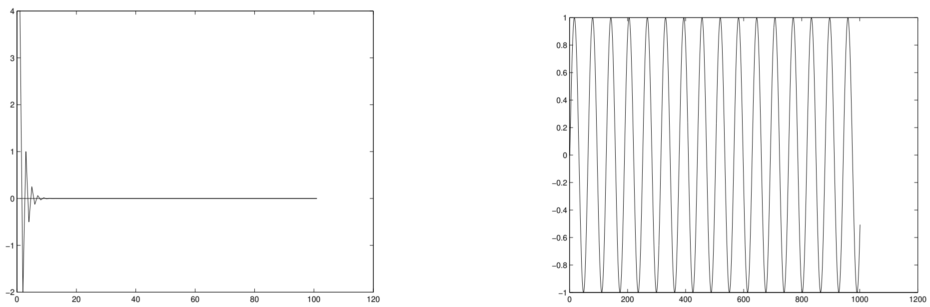

Fig. 4: Señales de Error y de Perturbación.

Nótese que efectivamente, la dinámica del error no se ve influenciada por la presencia de la perturbación, y es asintóticamente estable.

4 Conclusiones

Se ha presentado una técnica para la síntesis de observadores robustos, basada en la generalización del observador de Luenberger, al utilizar la salida y su derivada en la construcción del estimador de estados.

La técnica mostrado permite un rechazo pleno de las perturbaciones presentes en la dinámica del sistema y, dado que el método considera la derivación de la salida, para el caso de sistemas con ruido en los sensores, debe considerarse un tratamiento de filtraje previo, antes de implantar el observador robusto.

Referencias

[1] F. L. Lewis. "Applied Optimal Control & Estimation". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.

[2] T. Kailath, "Linear Systems", *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[3] L.M. Silverman and H.E. Meadows, "Controllability and observability in time variable linear systems", *SIAM J. Control*, **5**, 64-73, 1967.

[4] J. O'Reilly, "Observers for Linear Systems", *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, London, 1983.

[5] A. Ríos Bolívar y F. Szigeti, "Diseño de Controladores para Sistemas Continuos-Lotes", *III Coloquio sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*, L.U.Z., Maracaibo, Venezuela, 1997.

[6] A. Ríos Bolívar, F. Szigeti and R. Tarantino, "A Method for Fault Detection and Isolation in Process Control", *Submited*, Mérida, Venezuela, 1998.

[7] A. Ríos Bolívar, G. García, F. Szigeti and, J. Bernussou, "A Fault Detection and Isolation Filter for Linear Systems with Perturbations". Submitted to IFAC World Congress, Beijing, 1999.

[8] H. Sira Ramírez, S. K. Spurgeon and A. Zinober, "Robust Observer-Controller Design for Linear Systems". *Variable Structure and Lyapunov Control*, A. Zinober (Ed). Springer-Verlag, London, 1994.

[9] F. Szigeti, "Observadores con Ganancia Variante en el Tiempo", *IX Jornadas de Matemáticas*, L.U.Z., Maracaibo, Venezuela, 1996.

[10] F. Szigeti y A. Ríos Bolívar, "Control Robusto de Sistemas Inciertos via Filtros de Detección", *III Coloquio sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*, L.U.Z., Maracaibo, Venezuela, 1997.

[11] F. Szigeti, J. Bokor, A. Edelmayer, R. Tarantino, "Fault detection filter for linear time varying systems: An algebraic-geometric approach", *Proc.ECC-97.* Brussels, Belgium, 1997.

[12] W.M. Wonham, "LINEAR MULTIVARIABLE CONTROL: A Geometric Approach", *Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1985.