Ejercicios propuestos
Teoremas de funciones diferenciables
Cálculo 20. Sem-B12

Prof. José Luis Herrera

1. Verificar si las funciones siguientes satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo considerado. Hallar algún (os) valor(es) de c que verifiquen la conclusión:

$$\begin{aligned}
a) f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad \text{en} \quad [1,2] \\
b) f(x) &= x^{3/4} - 2x^{1/4} \quad \text{en} \quad [0,4] \\
c) f(x) &= 3\sin^2(x) \quad \text{en} \quad [\pi/2, 3\pi/2] \\
d) f(x) &= \sqrt{1+\sin(x)} \quad \text{en} \quad [0,\pi] \\
e) f(x) &= 1 - |x| \quad \text{en} \quad [-1,1] \\
f) f(x) &= \frac{2x^2 - 5x - 3}{x-1} \quad \text{en} \quad \left[-\frac{1}{2}, 3\right] \\
g) f(x) &= 1 - \sqrt[3]{x^2} \quad \text{en} \quad [-1,1] \\
h) f(x) &= \begin{cases} 3x+6 & si \quad -6 \leq x < -5 \\ x-4 & si \quad -5 \leq x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Hallar las dos intersecciones con el eje x de la gráfica

$$f(x) = x^2 - 3x + 2,$$

y probar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre ellas.

3. Sea

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Hallar todos los números c en el intervalo $(-2,2)$, tales que $f'(x) = 0$.

4. En los siguientes ejercicios, explicar por qué no se aplica a la función $f(x)$ el Teorema de Rolle, a pesar de que existen a y b tales que $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned}
a \quad) \quad & f(x) = 1 - |x-1| \\
b \quad) \quad & f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}
\end{aligned}$$

5. La altura de una bola, t segundos después de ser lanzada, viene dada por:

$$f(t) = -16t^2 + 48t + 32.$$

a) Comprobar que $f(t) = f(2)$. b) Según el Teorema de Rolle, ¿Cuál debe ser la velocidad en algún punto del intervalo $[1,2]$?

6. El costo de adquisición y el transporte de componentes utilizados en un proceso de manufactura está dado por:

$$C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right),$$

donde el costo C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido, en cientos de unidades. a) Comprobar que $C(3) = C(6)$. b) De acuerdo con el Teorema de Rolle, la tasa de cambio del costo debe ser cero para algún valor del tamaño del pedido en el intervalo $[3, 6]$. Hallar ese tamaño.

7. Aplicando el Teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica:

$$x^3 - 3x + b = 0,$$

no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, cualquiera sea el valor de b.

8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

en el intervalo $[1, 8]$ que pasa por el punto que satisface las condiciones del Teorema del Valor Medio.

9. La altura de un objeto, t segundos después de haberlo dejado caer desde una altura de 150 metros, viene dada por

$$s(t) = 4,8t^2 + 150.$$

a) Hallar la velocidad media del objeto durante los primeros 3 segundos. b) Usar el Teorema del Valor Medio para verificar que en algún instante de esos 3 segundos de caída, la velocidad instantánea era igual a la velocidad media. Hallar en qué instante se produjo la coincidencia.

10. Una empresa introduce un nuevo producto para el que el número de unidades vendidas viene dado por:

$$N(t) = 200\left(5 - \frac{9}{2+t}\right),$$

donde el tiempo t se mide en meses. a) Hallar la tasa media de cambio de $N(t)$ durante el primer año. b) ¿En qué mes ha sido $N'(t)$ igual a esa tasa media de cambio?

11. Probar que la ecuanción $x^5 + 10x + 4 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

12. Si $a > 0$, probar que la ecuación $x^3 + ax - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

13. Probar que $x^4 + 4x + b = 0$ tiene, a lo sumo, dos raíces reales. Sugerencia: Si $f(x) = x^4 + 4x + b$, ¿cuántas raíces tiene $f'(x) = 0$?

14. Probar que la ecuación $3\tan(x) + x^2 = 2$ tiene exactamente una raíz en $[0, \pi/4]$.

15. Usando el Teorema del Valor Medio, probar que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

16. Usando el Teorema del Valor Medio, probar que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.

17. Dos patrullas, equipadas con radar, están situadas a $8Km$ de distancia en una autopista. Cuando un camión pasa junto al primero de ellos, se le mide una velocidad de $90Km/h$, 4 minutos después, al pasar junto a la otra patrulla, ésta le mide una velocidad de $80Km/h$. Probar que en algún momento de esos cuatro minutos, en camión supero la velocidad de $100Km/h$.

18. Si $f(x) = \frac{2x-1}{2x-4}$ demostrar que no existe ningún punto en el intervalo $(1, 3)$ que cumpla con la hipotesis del Teorema del Valor Medio.

19. **Regla de L'Hopital** Dados los siguientes límites, aplique la regla de L'Hopital donde resulte adecuado. Si existe un método más elemental para resolverlo, utilícelo. Si no puede aplicar la regla de L'Hopital, explique por qué.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \qquad 2)\ \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t^3}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad 4)\ \lim_{x\to a^+} \frac{\cos(x)\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty} x^{\ln(2)/(1+\ln(x))} \qquad 6)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$$

$$7)\ \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \qquad 8)\ \lim_{x\to 1^+} \ln(x)\tan(\pi x/2)$$

$$9)\ \lim_{x\to 0} \cot(2x)\sin(6x) \qquad 10)\ \lim_{x\to\pi/4} (1-\tan(x))\sec(x)$$

$$11)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1 \qquad 12)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)} = e^{-1}$$

$$13)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2} \qquad 14)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/3}$$

$$15)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}} \qquad 16)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

$$17)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{x - \sin(x)} = -2 \qquad 18)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1)\sec(2x)$$

$$19)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{6} \qquad 20)\ \lim_{x\to 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x\ln(1+x)} = 2$$

$$21)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos(x)\right)^{\frac{1}{\cos(x)}} = e^{\frac{\pi}{2}-1}$$