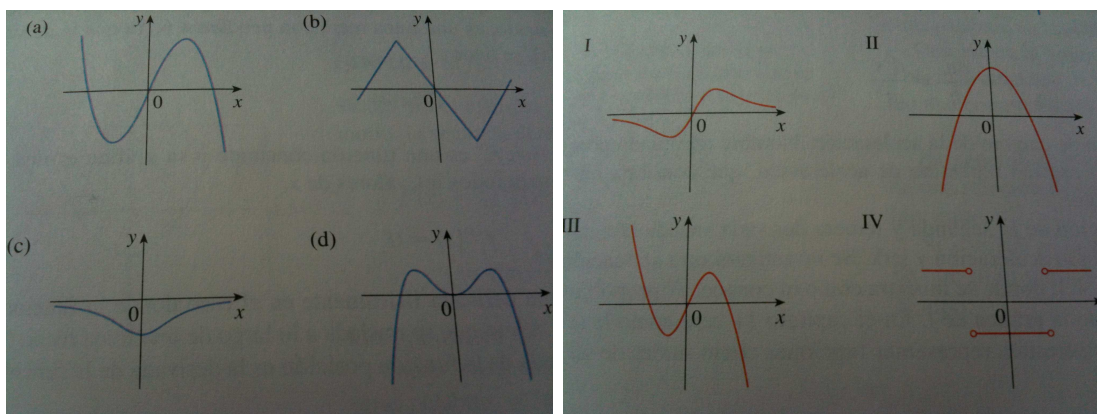


# Ejercicios propuestos

## Cálculo 20. Sem-A10

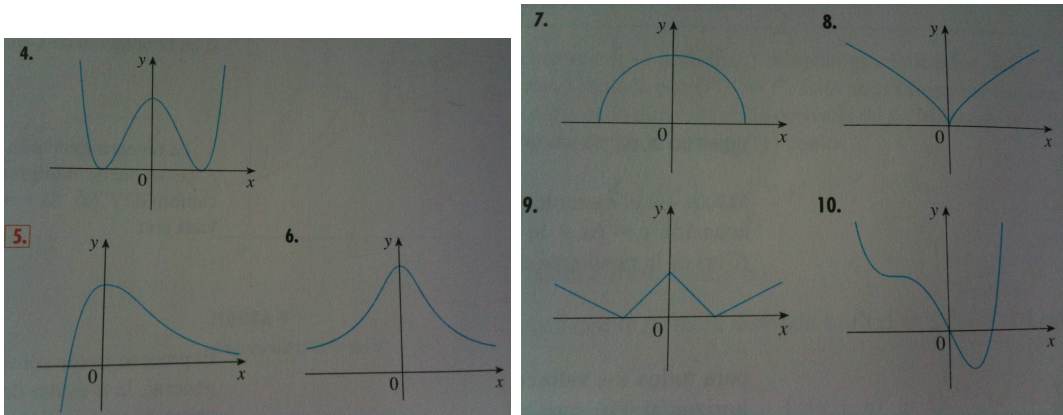
Prof. José Luis Herrera

- Dibuje la gráfica de la función  $f$  para la cual  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 3$ ,  $f'(1) = 0$  y  $f'(2) = -1$ .
- Dibuje la gráfica de la función  $g$  para la que  $g(0) = g'(0) = 0$ ,  $g'(-1) = -1$ ,  $g'(1) = 3$ , y  $g'(2) = 1$ .
- Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión  $P$  y el volumen  $V$  es constante. Suponga que, para cierto gas,  $PV = 800$ , donde  $P$  se mide en libras por pulgada cuadrada y  $V$  en pulgadas cúbicas.
  - Encuentre la razón promedio de cambio de  $P$  cuando  $V$  se incrementa de  $200\text{pulg}^3$  a  $250\text{pulg}^3$ .
  - Expresar  $V$  como función de  $P$  y demuestre que la razón instantánea de cambio de  $V$  con respecto a  $P$  es inversamente proporcional al cuadrado de esta última.
- Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)–(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I – IV. De las razones para sus selecciones.

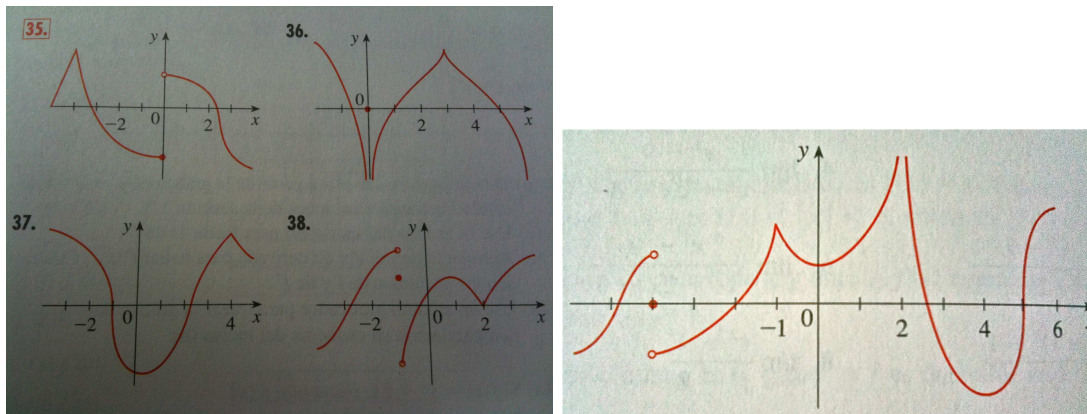


- Qué significa que  $f$  sea derivable en  $a$ ?
  - Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
  - Trace la gráfica de una función que es continua pero no derivable en  $a = 2$ .

6. Hallar un polinomio de segundo grado  $P$  de tal manera que  $P(2) = 5$ ,  $P'(2) = 3$  y  $P''(2) = 2$ .
7. La ecuación  $y'' + y' - 2y = x^2$  se denomina **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida  $y$  y sus derivadas  $y'$  y  $y''$ . Hallar las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de tal manera que la función  $y = Ax^2 + Bx + C$  satisfaga la ecuación.
8. Dadas las gráficas de las funciones de la figura siguiente, trazar las gráfica de  $f'$ .



9. (a) Para qué valores de  $x$  la función  $f(x) = |x^2 - 9|$  es derivable? Encuentre una fórmula para  $f'$ .  
(b) Grafique  $f$  y  $f'$ .
10. Se proporciona la gráfica de  $f$ . Establezca, con argumentos, los números en que  $f$  no es derivable.



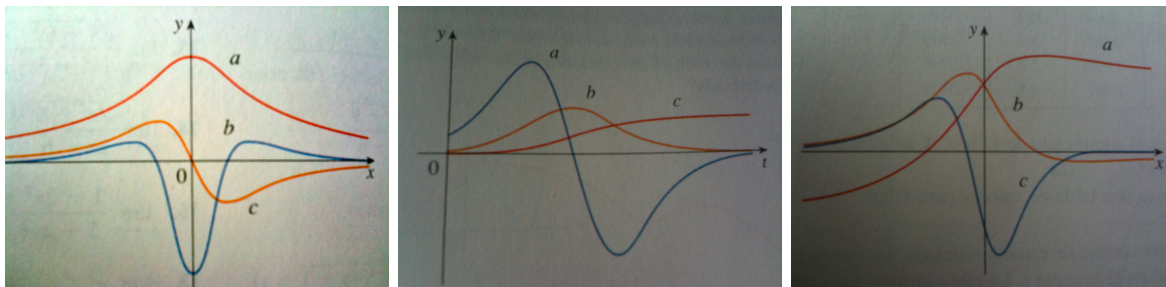
11. Considere la curva  $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  que tiene una recta tangente en  $x = 0$  con ecuación  $y = 2x + 1$  y otra recta tangente en  $x = 1$  con ecuación  $y = 2 + 3x$ . Halle los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .
12. Dibuje las parábolas  $y = x^2$  y  $y = x^2 - 2x + 2$ . Considera que existe una recta tangente a ambas curvas? De ser así, hallar su ecuación. Si no es así, Por qué no?

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de  $m$  y  $b$  que hacen que  $f$  sea siempre derivable.

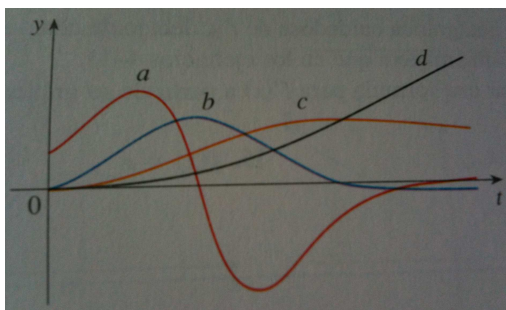
14. Las figuras siguientes exhiben las gráficas de  $f$ ,  $f'$  y  $f''$ . Indique cada curva y explique su elección.



15. Cuántas rectas tangentes a la curva  $y = x/(x + 1)$  pasan por el punto  $(1, 2)$ ? En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

16. Considere  $f(\pi/3) = 4$  y  $f'(\pi/3) = -2$ , y sea  $g(x) = f(x)\sin(x)$  y  $h(x) = \cos(x)/f(x)$ . Hallar a)  $g'(\pi/3)$  y b)  $h'(\pi/3)$ .

17. La siguiente figura muestra las gráficas de  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  y  $f'''$ . Identifique cada curva y explique su alternativa.



18. Determine los puntos de la curva  $y = (\cos(x))/(2+\sin(x))$  en los cuales la tangente es horizontal.

19. Determine las coordenadas  $x$  de todos los puntos de la curva  $y = \sin(2x) - 2\sin(x)$  en los cuales la tangente es horizontal.

20. Suponga que  $f$  es derivable en  $\mathfrak{R}$ . Sea  $F(x) = f(e^x)$  y  $G(x) = e^{f(x)}$ . Encuentre expresiones para a)  $F'(x)$  y b)  $G'(x)$ .

21. Sea  $r(x) = f(g(h(x)))$ , donde  $h(1) = 2$ ,  $g(2) = 3$ ,  $h'(1) = 4$ ,  $g'(2) = 5$  y  $f'(3) = 6$ . Encuentre  $r'(1)$ .

22. Para qué valores de  $r$  la función  $y = e^{rx}$  satisface la ecuación  $y'' + 5y' - 6y = 0$ ?
23. Encuentre la derivada 1000 de  $f(x) = xe^{-x}$ .
24. Demuestre por derivación implícita que la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto  $(x_0, y_0)$  es

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

25. Demuestre que la suma de las intersecciones  $x$  y  $y$  de cualquier recta tangente a la curva  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$  es igual a  $c$ .
26. Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí, es decir, cualquier curva de una familia es ortogonal a cualquier curva de la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

- a)  $x^2 + y^2 = r^2$  ,  $ax + by = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 = ax$  ,  $x^2 + y^2 = by$   
 c)  $y = cx^2$  ,  $x^2 + 2y^2 = k$   
 d)  $y = ax^3$  ,  $x^2 + 3y^2 = b$

27. Encuentre todos los puntos de la curva  $x^2y^2 + xy = 2$  donde la pendiente de la recta tangente es  $-1$ .
28. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado

$$a)y = \ln(xe^{x^2}), (1, 1) \quad , \quad b)y = \ln(x^3 - 7), (2, 0)$$

29. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones diferenciables tales que  $f'(u) = \frac{1}{u}$  y  $f(g(x)) = x$ . Probar que  $g'(x) = g(x)$ .
30. Hallar los ángulos que forman las siguientes circunferencias en el punto de intersección.  $C_1 : x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$ ,  $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ .
31. Sea

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

- a) Probar que  $g$  tiene inversa en  $\mathfrak{R}$ ; b) hallar  $(h^{-1})'(0)$ , c) hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto  $(0, 0)$ ; d) hallar la recta tangente al gráfico de  $h^{-1}$  en el punto  $(0, 0)$ .
32. Probar que la función  $y = x^4 + x^3$  satisface la ecuación  $2xy' - x^2y'' = -4x^4$ .
33. Probar que la función  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{a}{x} + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes, satisface la ecuación  $\frac{1}{6}x^4y''' - x^3y'' + 2x^2y' = 5a$

34. Si un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ , la altura del proyectil, después de  $t$  segundos, está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

- a) Probar que el proyectil alcanza su máxima altura cuando  $t = \frac{v_0}{g}$ . b) Probar que la altura máxima es  $s = \frac{v_0^2}{2g}$ .
35. Desde lo alto de un acantilado se dejan caer dos rocas, una tras otra con 3 segundos de diferencia. Probar que las rocas se separan con una velocidad de  $3g$  metros por segundo.
36. Calcule la derivada de las siguientes funciones. En los casos que se de la respuesta, demostrar que ese es el resultado. En caso contrario, recuerde simplificar sus resultados hasta la mínima expresión.

$$a) \quad y = \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) \quad , \quad y' = \frac{\arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$b) \quad y = e^x \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \quad y' = e^x \left[ \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} \right]$$

$$c) \quad y = \arctan\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad , \quad y' = -\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$$

$$d) \quad y = \frac{1}{2} \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad , \quad y' = \frac{1}{\sin^3(x)}$$

$$e) \quad y = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad , \quad y' = \frac{mx+n}{x^2 - a^2}$$

#### EJERCICIOS AÑADIDOS EL DÍA 24 DE FEBRERO DE 2010.

37. Sean  $f(x) = \frac{1}{1+1/x}$  si  $x \neq 0$ , y  $g(x) = \frac{1}{1+1/f(x)}$ . Calcular  $f'(x)$  y  $g'(x)$ .
38. Sea  $f(x) = x^2 + ax + b$  para todo  $x$ . Hallar valores de  $a$  y  $b$  tales que la recta  $y = 2x$  sea tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(2, 4)$ .
39. Una función  $f$  está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c, \end{cases}$$

( $a, b, c$  constantes). Hallar los valores de  $a$  y  $b$  (en función de  $c$ ) tales que  $f'(c)$  exista.

40. Encuentre  $y''$ , si  $x^3 - 4y^2 + = 0$ .
41. Encuentre  $y''$  en  $(2, 1)$ , si  $2x^2y - 4y^3 = 4$ .
42. Demuestre que las hipérbolas  $xy = 1$  y  $x^2 - y^2 = 1$  se intersectan en ángulos rectos.

43. Demuestre que las gráficas de  $2x^2 + y^2 = 6$  y  $y^2 = 4x$  se intersectan en ángulos rectos.
44. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo del eje  $x$ , de modo que su posición  $x$  y velocidad  $v = dx/dt$  satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

donde  $v_0$ ,  $x_0$  y  $k$  son constantes. Demuestre por medio de derivación implícita que

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

siempre que  $v \neq 0$ .

45. Un globo esférico se expande debido al calor del Sol. Encuentre la tasa de cambio del volumen del globo con respecto a su radio cuando el radio es de 5 metros.
46. Si  $F(z) = r(s(z))$ ,  $r(x) = \sin(3x)$ , y  $s(t) = 3t^3$ , encuentre  $F'(z)$ .
47. Desde el suelo, un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura  $s$  al final de  $t$  segundos es aproximadamente  $s = 128t - 16t^2$  pies.
- (a) Cuándo alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?
- (b) Cuándo llega al suelo y con que velocidad?
48. Un objeto se mueve sobre un eje coordenado horizontal. Su distancia dirigida,  $s$ , desde el origen al final de  $t$  segundos es  $s = t^3 - 6t^2 + 9t$  pies.
- (a) Cuándo se está moviendo el objeto hacia la izquierda?
- (b) Cuál es su aceleración cuando su velocidad es cero?
- (c) Cuándo es positiva su aceleración?

En los ejercicios del 49 al 51 dibuje la gráfica de alguna función continua  $f$ , cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, la cual satisfaga las condiciones indicadas.

49. El contradominio de  $f$  es  $(-\infty, \infty)$ ;  $f$  es diferenciable en todo número excepto en 0 y 3;  $f(-3) = -1$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(3) = 1$ ;  $f'_-(0) = 1$ ;  $f'_+(0) = 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty.$$

50. El contradominio de  $f$  es  $[0, \infty)$ ;  $f$  es diferenciable en todo número excepto en  $-2$ , 0 y 2;  $f(-2) = 0$ ;  $f(0) = 3$ ;  $f(2) = 0$ ;  $f'_-(-2) = -1$ ;  $f'_+(-2) = 1$ ;  $f'_-(2) = -1$ ;  $f'_+(2) = -1$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

51. El contradominio de  $f$  es  $(-\infty, \infty)$ ;  $f$  es diferenciable en todo número excepto en  $-2, 0$  y  $2$ ;  $f(-2) = 3$ ;  $f(-1) = 0$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(1) = 0$ ;  $f(2) = -3$ ;  $f'_-(-2) = 1$ ;  $f'_+(-2) = -1$ ;  $f'_-(2) = -1$ ;  $f'_+(2) = 1$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

52. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que sus primeras y segundas derivadas existen y si  $h$  es la función definida por la ecuación  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ , demuestre que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

53. Se golpea una bola de billar de modo que se desplaza en línea recta. Si  $s$  centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los  $t$  segundos, entonces  $s = 100t^2 + 100t$ . Si la bola golpea una banda que se encuentra a  $39cm$  de su posición inicial, a qué velocidad la golpea?.

54. Suponga que  $f$  y  $g$  son funciones tales que  $f'(x) = 1/x$  y  $(f \circ g)(x) = x$ . Demuestre que si  $g'(x)$  existe, entonces  $g'(x) = g(x)$ .

55. Demuestre que si  $xy = 1$ , entonces  $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 4$ .

56. En clase, se demostró la derivada de la función  $f(x) = |x|$ , la cual se expresó como una función por partes. Demuestre que ésta derivada también se puede escribir como  $D_x(|x|) = \frac{|x|}{x}$  si  $x \neq 0$ . (Considere  $|x| = \sqrt{x^2}$ ).

57. Determine  $D_x^2(|x|)$  cuando exista. Considere la sugerencia del ejercicio anterior.

58. Determine la derivada de las siguientes funciones

$$a) f(x) = |x^2 - 4|, \quad b) g(x) = x|x|$$

59. Si  $f(x) = |x|^3$ , determine  $f'(x)$  y  $f''(x)$  cuando existan.

60. Sea  $g(x) = |f(x)|$ . Demuestre que si  $f'(x)$  y  $g'(x)$  existen, entonces se cumple que  $|g'(x)| = |f'(x)|$ .

61. Dada la relación  $|x^2 - y^2| - 10(x^2 + y^2) = 0$ , hallar  $dy/dx$ . Para qué valores de  $x$  existe esta derivada?

62. En los siguientes ejercicios, a) demuestre que la función  $f$  tiene una inversa y b) obtenga  $(f^{-1})'(d)$ . (justifique sus respuestas)

$$a) f(x) = x^2 - 6x + 8, [3, +\infty), d = 3; \quad b) f(x) = \sqrt{3x + 4}, d = 5;$$

$$c) f(x) = 8x^3 + 6x, d = 4; \quad d) f(x) = x^5 + x - 22, d = 12$$

RECUERDEN QUE ESTA GUIA ES SOLO UNA AYUDA DE ESTUDIO. EN NINGUN MOMENTO SUSTITUYE A LOS LIBROS. RECUERDEN REVISAR LOS LIBROS BASICOS: DEMIDOVICH, LEITHOLD, PURCELL, STEWART, ENTRE OTROS. SUERTE.