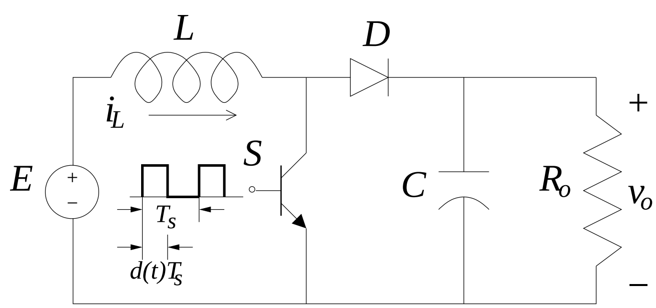
Instrumentación 1

aka *Elementos*



Richard Jacinto Márquez Contreras

Notación

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^n$	números reales, reales mayores que 0, n-tuplas de reales
$\mathbb{N}$	números naturales: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{C}$	números complejos
$\{\ldots \mid \ldots\}$	conjunto de ... tales que ...
$(a\,..\,b)$, $[a\,..\,b]$	intervalo (abierto o cerrado) de reales entre a y b
$\langle\ldots\rangle$	sucesión; como un conjunto pero donde el orden importa
$\vec{v}, \vec{w}$	vectores
$\vec{0}$, $\vec{0}_V$	vector cero, vector cero de V
B, D	bases
$\mathcal{E}_n = \langle\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\rangle$	base canónica (o estándar) para $\mathbb{R}^n$
$\vec{\beta}, \vec{\delta}$	basis vectors
$\mathrm{Rep}_B(\vec{v})$	matrix representing the vector
$\mathcal{P}_n$	conjunto de polinomios de grado n
$\mathbb{R}^{n\times m}$	conjunto de matrices de $n\times m$ con coeficientes reales
A, B	matrices
$h_{i,j}$	elemento de la fila i, columna j de una matriz
$\lvert T\rvert$	determinante de la matriz T

Portada.

En la portada se muestra un convertidor de potencia DC-DC del tipo *Boost*.

Introducción

En conmemoración a los 120 años[1]
de la muerte de Gustav Kirchhof
(12 de marzo 1824—17 de octubre de 1887)

Este texto tiene como objetivo servir de apoyo a los estudiantes que pretenden adquirir cierta maestría en circuitos eléctricos, circuitos electrónicos, su diseño y sus aplicaciones.

Escribir un texto en un área en la cual existen muchos y muy buenos textos es realmente una tarea difícil. (El lector encontrará referencia a algunos interesantes textos de circuitos eléctricos, más adelante en la **Bibliografía recomendada**.) Estas notas, las cuales aspiran a ser consideradas algún día como un “libro de texto”, hoy constituyen una guía de estudio sobre algunos temas básicos de los circuitos eléctricos y electrónicos. El lector no encontrará nada nuevo respecto a los múltiples temas tratados, el valor que posee esta guía de estudio se basa en enfocar los conceptos y metodologías dados a través de **aplicaciones** (algunas veces simples, otras veces no tanto) y mediante **trabajo práctico en laboratorio** del estudiante/aprendiz, guiado de manera diligente por el profesor/instructor. En particular, me he interesado en que parte de estos conceptos sean vistos en términos de las posibles *aplicaciones de control automático* que puedan surgir y de los conceptos de *teoría de control* que están relacionados.

Más allá de ser un mero requisito académico (un informe de año sabático), este texto surge de una motivación genuina, muy ambiciosa quizás, de concentrar en un temario de un semestre la mayor parte de los conceptos fundamentales que pueden ser necesarios en el curso **Instrumentación I** de la carrera de Ingeniería de Sistemas. El curso Instrumentación I, anteriormente llamado **Elementos de Ingeniería Eléctrica** o simplemente “Elementos”[2], fue creado con el fin de brindar a los estudiantes de tres opciones muy diferentes (Computación, Control y Operativa) de la carrera de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Los Andes (U.L.A.), una visión general y, al mismo tiempo, práctica de los principios básicos de circuitos eléctricos y electrónicos y sus aplicaciones, en particular, en la medición de señales eléctricas y su adquisición mediante el PC o computador digital.

[1]El valor 120 es significativo en Ingeniería Eléctrica. En particular 120 V corresponde a la de cada una de las fases de la red eléctrica a la cual están conectadas nuestras casas.

[2]Espero que sea clara la analogía con los *Elementos* de Euclides, fundamento y base de las construcciones geométricas. En nuestro caso, los circuitos eléctricos y electrónicos son fundamento y base no sólo de las ingenierías Eléctrica, de Control, de Instrumentación y Automatización, y de sus múltiples ramas asociadas, sino forman la base de nuestra sociedad altamente dependiente de la electricidad y de la tecnología.

Los prerequisitos. Algunas referencias gratuitas[3] en Internet.

El lector/estudiante/aprendiz debería tener un conocimiento básico del álgebra de ecuaciones lineales, de preferencia desde el punto de vista matricial. En el caso del Álgebra Lineal, una buena referencia que cubre más temas de los que quizás se necesitan, la cual además está disponible en Internet, es la de Hefferon (2006). Es recomendable pero no indispensable que manipule ecuaciones diferenciales y el cálculo operacional a través de la transformada de Laplace[4]. Un conjunto interesante de notas de clases, son las de Dawkins (2005), las cuales incluyen no sólo un tratamiento de las ecuaciones diferenciales básicas sino del álgebra lineal y de la transformada de Laplace. Igualmente recomendable es el disponer de una cierta "intuición física", la cual en el caso eléctrico es más difícil de tener (porque la electricidad no se puede ver), a menos que no sea por la desdicha de llevarse un "corrientazo". Un interesante texto disponible en Internet es el de Schiller (2007), *Motion Mountain: The Adventure of Physics*, que hace un paseo desde el átomo y el movimiento de los electrones hasta las analogías de la electricidad con los fluidos en tuberías, las cuales son verdaderamente enriquecedoras.

Bibliografía recomendada.

La siguiente es una selección muy personal de algunos textos que considero pueden ser utilizados para ahondar en los temas propuestos en esta guía. Aunque las referencias que voy a dar son todas en inglés existen traducciones de muchos de estos excelentes textos.

Richard Dorf es Profesor de *Electrical and Computer Engineering* en la Universidad de California, Davis, `www.ucdavis.edu`, miembro *Life Fellow* (1973) de la organización IEEE[5] por sus aportes en la educación en ingeniería. Su libro *Electrical Circuits* (Dorf & Svoboda 2006), hoy en su séptima edición, es una referencia obligada en el área de análisis de circuitos eléctricos por su pedagogía y la presentación de los contenidos. Otro libro que me parece muy interesante, muy similar al anterior y también referido al área de circuitos eléctricos, es el de DeCarlo & Lin (2001). En el caso de la electrónica, me inclino por el de Millman & Grabel (1987), *Microelectronics*, un libro denso (abarca tanto circuitos electricos como electrónicos, con énfasis en transistores); este libro basa su filosofía en las **cuatro "C"**: **circuitos**, **control**, **comunicaciones** y **computación**, bases fundamentales de la tecnología de hoy en día.

El libro de Chua, Desoer & Kuh (1987) presenta una visión unificada al estudio de las propiedades de las redes y circuitos eléctricos, tanto lineales como no lineales. Por ejemplo, el diodo es analizado como un resistor no lineal (2-Terminales, 1-Puerto) y los transistores (bipolar y MOS) son vistos como redes resistivas no lineales multiterminales de 2-Puertos. Dr. Leon Chua (*Fellow* de la IEEE) y Charlie Desoer son dos pioneros en diversas áreas de la Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Otro libro que merece especial atención es el de Plonus (2001), educador y miembro *Fellow* (1985) de la IEEE por sus aportes en educación. Según su autor, el objetivo de este texto es el de *reunir en el transcurso de un semestre la información necesaria de circuitos eléctricos y dispositivos electrónicos para aquellos que no son ingenieros electricistas ni electrónicos*. El texto proporciona una visión general lo suficientemente específica para

[3] "Gratuito" significa disponible de manera libre bajo licencia GNU Free Documentation License o Creative Commons Attribution-ShareAlike, o distribuido legalmente de manera gratuita (*free* en inglés) en la Web.

[4] En honor a Pierre-Simon (marquis de) Laplace (1749–1827).

[5] Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., `www.ieee.org`

que el estudiante “pueda interactuar de manera inteligente con otros ingenieros”; se enfoca en las aplicaciones de transistores y amplificadores operacionales, en particular, en el campo de las comunicaciones digitales.

El enfoque de las Aplicaciones.

La experiencia de dictar *Elementos* ha sido una experiencia motivadora en si misma y enriquecedora desde el punto de vista de la enseñanza. En mi opinión, este curso es el mejor reflejo de que la teoría y la práctica pueden ir de la mano. Por esta misma razón, constituye un reto tanto para el estudiante como para el instructor (profesor guía) que tiene que ofrecerlo. Mi motivación personal para intentar escribir este texto nace precisamente de las inquietudes por hacer montajes prácticos de los cientos de estudiantes que pasaron por nuestras aulas, tanto en mi caso como en el del Prof. Mario de Jesús Spinetti Rivera, colega y estimado pedagogo. Vayan hasta ellos mis más sinceras gracias, me han enseñado y me seguirán enseñando a comprender que, para nosotros los ingenieros, la teoría es sólo útil cuando se le pone al *servicio de la práctica*.

Es por esto que, a medida que estas notas se vayan desarrollando, la orientación que se le dará será en lo posible hacia el trabajo de laboratorio y al estudio y montaje de aplicaciones particulares. Consideraremos las configuraciones básicas de los componentes eléctricos y electrónicos dentro de un circuito, siempre teniendo en mente la construcción de dispositivos que cumplan ciertas funciones específicas. Ejemplos de posibles aplicaciones son:

- atenuación o amplificación de una señal eléctrica
- aislamiento entre dos o más circuitos
- osciladores
- filtro pasa-bajo, pasa-banda
- rectificación y conversión AC-DC
- indicadores luminosos
- compensadores analógicos (proporcional, adelanto-atraso)
- convertidores de potencia DC-DC
- medidores de posición angular
- detectores de movimiento o posición
- alarmas
- et cetera

Sería interesante que el estudiante visite el curso 6.002 *Circuits and Electronics* del *M.I.T. OpenCourseWare* (`http://ocw.mit.edu`). Este curso tiene el mismo espíritu que las notas que usted tiene en sus manos, por su enfoque y su visión de laboratorio: *brindar al estudiante la capacidad de (1) diseñar y construir circuitos, (2) tomar medidas del comportamiento y del desempeño del circuito, (3) comparar con las predicciones de los modelos circuitales y explicar discrepancias.*

Advertencias.

A los estudiantes. Desde ya se puede apreciar que este curso no es sencillo. Es de naturaleza interdisciplinaria. Por un lado, la teoría se beneficia del álgebra lineal y de las ecuaciones diferenciales, de la física, del cálculo y de la simulación numérica. Por otro lado, requiere del trabajo en laboratorio, de tomar buenas notas de laboratorio, de la redacción de informes, de la organización propia de datos y de resultados, del manejo técnico de equipos. Requiere particularmente de la visión unificadora de la teoría y la práctica, de tener la capacidad de entender los resultados y contrastarlos con las predicciones (numéricas y conceptuales) de la teoría.

No tiene que ver con que se exija demasiado. El problema es que los estudiantes, lamentablemente muchos, hasta este punto no se han ocupado de aprender las herramientas en sus cursos de matemáticas y física (frase típica: ¿para qué necesito aprender eso — cálculo ó física — si yo voy a ser ingeniero?). Instrumentación 1 es un reflejo de que esos cursos tenían algún sentido, sólo que su aplicación se retrasó hasta ahora.

A los instructores. Enseñar este curso es de verdad un trabajo de servicio. De llevar a los estudiantes desde los conceptos abstractos a la realización práctica de laboratorio. Por su misma naturaleza interdisciplinaria, enseñar se hace difícil porque los estudiantes o no saben o no recuerdan y debe uno motivarlos a alcanzar un nivel adecuado desde los elementales (¿pocos?) conocimientos que, muchas veces, poseen. Si Usted va a impartir este curso, no me queda más que desearle suerte y ánimo, lo va a necesitar.

Otro punto importante: creo que en particular en la U.L.A., *los profesores de los cursos de cálculo, y muy probablemente los de física, no saben o no entienden la importancia que tienen sus cursos en la formación de ingenieros.* En la medida que pueda, a lo largo del texto, iré haciendo hincapié en puntos importantes de la matemática y la física que deben comprender los estudiantes para lograr tener éxito en este curso.

Los Temas tratados.

Vamos a considerar los siguientes elementos de circuitos eléctricos y electrónicos:

- fuente eléctrica, de tensión o de corriente (también llamada batería)
- resistor
- bobina o inductor
- condensador o capacitor
- transformador
- amplificador operacional o ampliop
- diodo
- transistor

Los últimos tres son los componentes electrónicos elementales. Todos estos elementos intervienen en la conversión o *transformación de la energía eléctrica* dentro de un circuito o conjunto de circuitos o dentro de una red eléctrica.

En una versión posterior de estas notas, también será posible considerar, al menos en forma sintetizada, circuitos integrados digitales, tales como compuertas lógicas, *flip-flops*, entre otros, los cuales son la base del manejo de *microprocesadores*.

Los Ejercicios, el uso de Computadoras y el Laboratorio.

What is the use of writing and reading books
without putting them into practice?
Sri Sathya Sai Baba

Jim Hefferon, en su libro citado anteriormente *Linear Algebra* (Hefferon 2006), proporciona el consejo más importante que quizás se puede hacer al estudiante:

Piénselo un poco

haga muchos ejercicios!

Sería recomendable que durante el curso se emplee MATLAB®, Octave o una hoja de cálculo (como Excel™) para verificar los cálculos realizados, así como analizar el comportamiento de un circuito antes de realizar el montaje. Recordemos que el comportamiento dinámico en el tiempo de un circuito dado puede estar representado por una ecuación diferencial y las soluciones a este tipo de ecuaciones las vamos a obtener generalmente usando aproximaciones numéricas mediante el computador. Esto nos va a permitir, por un lado, transformar nuestro modelo matemático en un modelo numérico y, por otro, contrastar hasta que punto las predicciones teóricas de la realidad son válidas.

Sería muy útil disponer durante el curso de algún programa comercial para la simulación de circuitos eléctricos, tal como PSpice, Orcad®, MicroSim, CircuitMaker u otro similar. Este tipo de programas también permiten verificar los diseños **antes** de realizar el montaje, de forma tal de poder rediseñar antes de ir al laboratorio.

El acostumbrarse a trabajar con circuitos eléctricos pasa no sólo por "entender" la teoría (o decir que uno la entiende), uno debe ser capaz de manejar los conceptos de forma que se pueda "hacer algo" con ellos. El asistir al Laboratorio, hacer los prelaboratorios, investigar el tema tratado más allá de lo visto en clases, diseñar los circuitos, hacer los montajes y las mediciones, llevando un registro adecuado de todas las experiencias en el cuaderno de laboratorio, son los requisitos mínimos que uno debe plantearse como estudiante al momento de imponerse la tarea (finalmente se disfruta a pesar de todo) de llevar adelante este curso. A lo largo del texto se hacen propuestas de experiencias de laboratorio (aquellas secciones marcadas con "Lab:") que impulsarán al estudiante a completar su formación más allá del aula de clases, para investigar en la Web, revisar manuales de laboratorio, usar hojas de datos de componentes, acostumbrarse al uso de las fuentes y de los equipos de medición, entre otras actividades. Además, en ciertos lugares del texto, encontrará "Tips–lab: ", una indicación que corresponde a un comentario o ayuda de tipo práctico para el laboratorio. Si Usted es un ingeniero, o aspira a serlo, debe ser capaz de hacer **mediciones** y para ello debe tener un conocimiento básico del uso de los **instrumentos de medición** (multímetro digital, osciloscopio) y debe saber cómo **procesar los datos** que obtiene de tales instrumentos.

El laboratorio no sólo permite verificar las *predicciones de la teoría*, transformándolas en realidad, sino también verificar las condiciones bajo las cuales esa teoría se cumple; al realizar las prácticas del laboratorio, el estudiante puede darse cuenta que la realidad *no funciona* en ciertas ocasiones exactamente como dice la teoría, debido a que las condiciones de laboratorio no satisfacen las suposiciones establecidas *a priori*.

Piénselo un poco

laboratorio y práctica = realidad

La siguiente cita refleja de manera muy precisa mi sentir al pasar del *entendimiento* de la teoría al *saber* que aporta la práctica:

If you really wish to learn then ***you must mount the machine***
and become acquainted with its tricks ***by actual trial****.*
–*Wilbur Wright.* Citado en (Hefferon 2006).

Quizás es por esta razón que este curso siempre me ha parecido interesante. En mi opinión, es la *ingeniería* como un ingeniero la quiere aprender: *a través de la práctica.* Los circuitos eléctricos y, en particular, la electrónica son la base de TODA la tecnología actual (junto con la computación y las comunicaciones). Aprender estos conceptos, entenderlos y, sobre todo, *saberlos usar* es una puerta que se abre a un universo de posibilidades.

Algunos comentarios para finalizar, antes de comenzar.

Este texto está lejos de estar completo. En todo momento se hace referencia a otros textos, no sólo del área de circuitos eléctricos, sino del área de Matemáticas, en especial de Álgebra Lineal, de Control Automático, inclusive haciendo hincapié en el uso de la Biblioteca y de la Hemeroteca y de los recursos que nos brinda Internet.

Los circuitos eléctricos, en particular si son pensados para ser utilizados en aplicaciones de Control Automático, requieren no sólo una comprensión del problema teórico que involucran, sino del problema práctico de implementación. Dentro de este problema se incluyen los costos y la disponibilidad de componentes, así como la disponibilidad de equipos adecuados. En nuestros países latinoamericanos, la escasez de equipamiento puede ser un obstáculo al momento de aprender y de enseñar; creo que también puede ser un gran motivador para la búsqueda de soluciones alternativas y para impulsarnos a tomar un punto de vista diferente en todo momento. Un punto de vista diferente, creativo e innovador es el que nos puede brindar la oportunidad de cambiar nosotros mismos y nuestro entorno.

Richard Márquez
Ciudad de México, 18-10-2007

Dirección. Richard Márquez, Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, Núcleo B, La Hechicera, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Edo. Mérida, VENEZUELA, marquez@ula.ve

Nota del autor. Usted encontrará palabras en inglés que identifican conceptos, magnitudes físicas, componentes eléctricos y electrónicos. Estos nombres son indicados generalmente en itálicas, p.e. *opamps* ó *operational amplifiers*.

A pesar de que no es estrictamente apropiado, en muchos casos emplearemos indistintamente la palabra *tensión* o *voltaje* (del inglés *voltage*) para designar la misma característica física (la diferencia de potencial entre dos terminales o dos puntos en un crcuito).

Contenido

[*] *Nota:* los temas marcados con un “asterisco” o una “estrella” no están terminados.

Contenido tentativo

Este es un índice tentativo de un libro de texto más o menos completo.

Parte I

Modelado de Circuitos Eléctricos Resistivos

Capítulo Uno

Las leyes básicas

Contenido: Ley de Ohm, leyes de Kirchhoff — LTK, LCK — , nodos, ramas, mallas, nodo tierra, tensiones en los nodos respecto a un nodo de referencia. Medición de magnitudes eléctricas y unidades.

En los próximos cuatro capítulos veremos solamente circuitos resistivos (en el siguiente capítulo consideraremos los elementos acumuladores de energía). Estamos interesados en el **análisis DC** (análisis de corriente directa) de circuitos resistivos, el cual será útil más delante en el **análisis de condiciones iniciales**.

A continuación iremos describiendo cada uno de los elementos que componen un circuito eléctrico, así como las relaciones que se pueden establecer entre dichos elementos. Nosotros estamos interesados en *medir* las tensiones y las corrientes en un circuito eléctrico.

I Cantidades básicas. La Ley de Ohm

El elemento más simple de un circuito eléctrico es el *resistor*. Este elemento permite caracterizar la relación entre dos cantidades eléctricas básicas: la *tensión* y la (intensidad de la) *corriente* eléctrica. En la Figura 1.1 se muestra un (dibujo) *esquemático* de un resistor. Si pensamos en que la tensión v es en cierta forma la capacidad de hacer que un elemento conduzca una cierta corriente i, la *resistencia* R se corresponde a la característica natural del elemento de oponerse al paso de tal corriente.

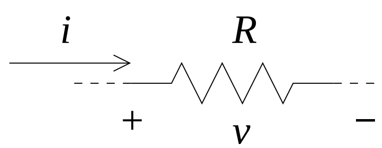


Figura 1.1: Dibujo esquemático de una resistencia

A la siguiente relación se le llama *Ley de Ohm*[1].

[1] Lleva este nombre en honor al físico y matemático alemán que la descubrió, Georg Simon Ohm (1789–1854).

1 Definición La relación o ley que asocia la corriente i y la tensión v aplicada en los extremos de un resistor ideal (lineal) está dada por:

$$v = Ri \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) representa uno de los modelos matemáticos más simples de elementos circuitales. Este modelo, al igual que tantos otros de los que estudiaremos, será válido solamente en una *región de operación*. En el caso del resistor, por ejemplo, el valor de la resistencia R puede cambiar en función de la temperatura (relacionado con la potencia disipada, véase la Sección II). PREGUNTA. ¿Cómo funciona una bombilla incandescente de tungsteno?

Las unidades de las tres cantidades físicas involucradas son: la de la resistencia es el Ohm [Ω], la de la tensión es el Voltio [V] y la de la corriente es el Amperio [A]. La resistencia tiene la particularidad de siempre ser positiva[2] en los elementos lineales $R > 0$. Están relacionadas mediante [V]=[A]·[Ω].

La ley de Ohm también se puede escribir de la forma

$$i = Gv \quad \text{donde} \quad G = \frac{1}{R} = R^{-1}$$

Al valor G se le llama *conductancia* y su unidad de medida es el Siemens, [S] o mho ("ohm" al revés, $[\Omega^{-1}] = [\mho]$).

Vamos a asumir que existen elementos ideales llamados conexiones, cables conectores o simplemente *conectores*, los cuales permiten unir o *conectar* los elementos que conforman el circuito. Este tipo de elementos tienen la característica de poseer resistencia cero. Esto hace que al ser aplicada una tensión $v \neq 0$ entre los extremos la corriente i sea muy grande, ocasionando lo que se llama un *corto circuito*. Es por ello que si entre dos puntos de un circuito existe una conexión de este tipo, con resistencia 0 Ω, decimos que hay *corto*. En una conexión en corto, la tensión entre sus extremos es $v = 0$ [V] (TIPS–LAB: si los extremos de un multímetro están en *corto*, la tensión medida siempre es cero, independientemente de la intensidad de la corriente que circule por la conexión).

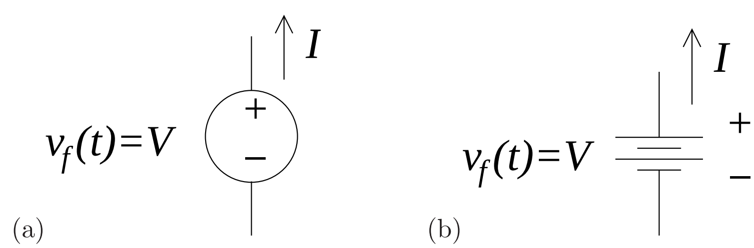


Figura 1.2: Diferentes símbolos o dibujos esquemáticos utilizados para representar una fuente independiente de tensión. El diagrama (b) no requiere indicar el terminal positivo

Un resistor es un *elemento pasivo* de un circuito eléctrico que *consume* energía. Su característica básica es la resistencia. El siguiente elemento a conocer es la *fuente*

[2]Más adelante, cuando tratemos elementos no lineales puede darse el caso de obtener $R < 0$ bajo ciertas condiciones.

eléctrica, la cual permite darle energía al circuito para su funcionamiento (es un *elemento activo*). Por ello se le llama también *fuente de poder*. Hay fuentes de diferentes tipos. Por ahora nos concentraremos en la *fuente independiente de tensión*, la cual denotaremos por $v_f(t)$ y puede tener un valor constante $v_f(t) = V$, E ó F (dos representaciones esquemáticas se muestran en la Figura 1.2). La característica principal de la fuente de tensión es que suministra una tensión E en [Voltios]. Se le llama fuente *independiente* de tensión porque (idealmente) siempre suministra la misma tensión V *independientemente* de la corriente I que circule a través de ella. TIPS–LAB: Los signos "+" y "-" corresponden a las polaridades de la fuente. Los signos + y - en la fuente indican también la forma en la que se conectará un *multímetro* o aparato de medición (como un osciloscopio, por ejemplo) para medir la tensión. Si intercambiamos la posición de los signos a - y +, el valor medido cambia de signo (en el multímetro el terminal '+' generalmente se asocia al terminal de color rojo y el '-' al terminal de color negro). Este principio nos va a servir al momento de calcular y validar los resultados obtenidos.

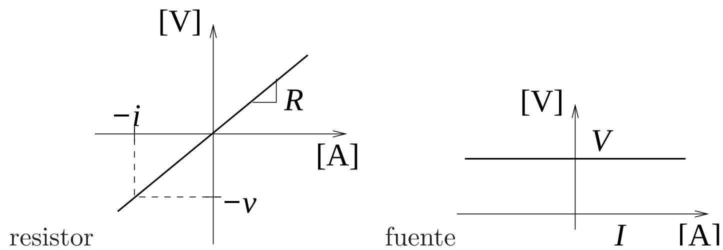


Figura 1.3: Característica v–i en el resistor y en la fuente independiente de tensión

En la Figura 1.3 se muestran las curvas de tensión–corriente o *característica* v–i, tanto del resistor como de la fuente independiente. La resistencia R corresponde a la pendiente de la característica v–i. Si la corriente es negativa $-i$, la tensión entre sus terminales $-v$ también será negativa, dada por la relación

$$(-v) = R(-i) \implies v = Ri$$

(elemento pasivo). En el caso de la fuente es interesante notar que la pendiente es cero ($R = 0$ Ω), es decir, la tensión V es constante para cualquier valor que tome I.

II Convención: regla de los signos. Potencia

En la Figura 1.1 se muestra la idea básica de la *regla de signos* que emplearemos de aquí en adelante. En todo *elemento pasivo* el sentido de la corriente i será "entrando" por la terminal + y "saliendo" del elemento por la terminal -. Esto es cierto en tanto $v > 0$ e $i > 0$. A diferencia del elemento pasivo, en la fuente (elemento activo) el sentido de la corriente I será "entrando" por la terminal - y "saliendo" del elemento por la terminal +. Esto es cierto en tanto $V > 0$ e $I > 0$. Esta será la convención que utilizaremos a lo largo de este texto (por ser precisamente una convención o eje referencial para los cálculos que hagamos, es posible cambiarlo o plantearlo de otra forma, pero esto equivaldría a cambiar de álgebra o en todo caso a cambiar la intuición física de la que estamos partiendo).

Commentario: Esto último será cierto en tanto la fuente se comporte como un elemento activo (suministra energía). Como veremos más adelante, en los circuitos eléctricos en los cuales hay más de una fuente puede pasar que una fuente entregue energía y el resto consuman energía, comportándose como elementos pasivos.

¿Cómo se puede caracterizar si un elemento es pasivo o activo? La regla anterior nos da la clave. Antes de hacerlo vamos a definir la potencia eléctrica.

1 Definición La *potencia eléctrica* de un elemento corresponde al producto de la tensión v por la corriente i

$$P = vi \tag{1.2}$$

Este valor será positivo, $P > 0$, para los elementos activos (que entregan energía al circuito) y negativo, $P < 0$, para los elementos pasivos (que consumen energía).

En términos de unidades, la potencia se puede medir en *Watts*[3] (en español se dice *vatios*), [W]. Se tiene [W] = [kg·m^2·s^{-3}] = [J·s^{-1}] = [V]·[I].

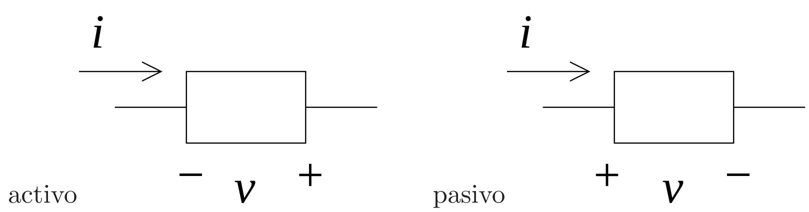


Figura 1.4: Elementos: activo (p.e. fuente) y pasivo (p.e. resistor)

Observemos la Figura 1.4. Se asume que $v > 0$ e $i > 0$. Realmente no pareciera existir diferencia entre los elementos pasivos y activos. Sin embargo, dada la regla de la potencia podemos darnos cuenta de que si el elemento activo tiene $P = vi > 0$ (observe que la tensión y la corriente van en el "mismo sentido"). Al observar el elemento pasivo se nota que la tensión y la corriente van en "sentidos opuestos" (la potencia debe ser negativa).

En muchos casos es difícil escoger la convención de signos precisa o la más intuitiva. El lector no debe preocuparse, sin embargo, de escoger la convención adecuada: al hacer los cálculos el resultado surge naturalmente. Es importante que el estudiante conserve la convención de signos dada hasta terminar el problema[4]. Véase la Figura 1.5, donde hemos asumido una convención diferente para el elemento pasivo (se le ha considerado como un elemento activo). Aparece una h que corresponde a la misma tensión v pero medida en sentido contrario, $h = -v$. Sin embargo, aplicando la misma regla que para el elemento activo se confirma que $P = hi = (-v)i = -vi < 0$, debido a los signos de las cantidades $h < 0$, $i > 0$.

[3]Este nombre viene del ingeniero escocés James Watt(1736-1819): la energía que proporciona un Joule (julio, [J]) por segundo genera un vatio (1 [W]) de potencia, 1 [W] = 1 [J]/[s] = 1 [J]·[s]$^{-1}$. La energía que se consume en nuestras casas se mide (sobre todo, se paga) en kilo-vatios-hora [kWh]. Un [kWh] es la cantidad de energía equivalente a la potencia de 1 [kW] consumidos en 1 hora (1000 [W]×3600 [s] = 3.6 [MJ] — 36 "mega Joules").

[4]Por supuesto, el estudiante lo que si debe hacer es llevar a cabo una "buena álgebra" al momento de hacer los cálculos. He encontrado que la gran mayoría de nuestros estudiantes tienen deficiencias precisamente en el álgebra lineal, que es la herramienta básica para hacer cálculos en circuitos eléctricos.

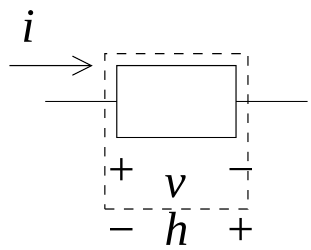


Figura 1.5: Elemento pasivo

Esta regla se aplica a todos los elementos circuitales involucrados. En el caso de asumir que una fuente entrega energía (Figura 1.4a) y en realidad la *consume*, una sola de las dos cantidades, v o i, tendrá signo negativo, de forma tal que la potencia P sea negativa, según lo dispuesto en nuestra convención de signos. Si la fuente entrega energía y uno de las cantidades es negativa, p.e. $i = -\hat{\imath}$, para $\hat{\imath} > 0$, entonces necesariamente la otra cantidad también será nagetiva, p.e. $v = -\hat{v}$, $\hat{v} > 0$, para que se cumpla $P = vi = (-\hat{v})(-\hat{\imath}) = \hat{v}\hat{\imath} > 0$ (elemento activo).

Comentario: Las leyes físicas no se equivocan, al hacer el montaje y la medición respectiva, las cantidades obtenidas tendrán los signos adecuados, independientemente de la convención de signos utilizada. Es decir, la convención de signos *no influencia el resultado*[5].

En la Figura 1.6 se muestran los diferentes diagramas del multímetro, dependiendo del uso que se le dé en un circuito: para medir tensión, corriente o resistencia. El terminal '-' es también llamado tierra o GRD (*ground* del inglés).

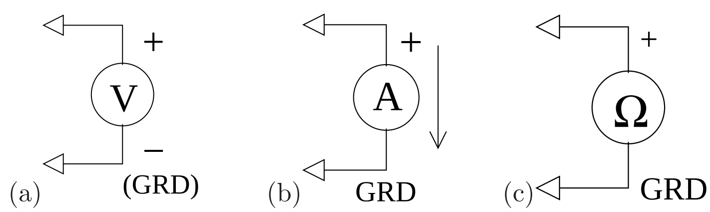


Figura 1.6: Diagramas eléctricos del multímetro: (a) usado para medir tensión (voltímetro), la V viene de "Voltios", (b) usado para medir corriente (amperímetro), la A viene de "Amperios", (c) usado para medir resistencia (ohmímetro)

Laboratorio: *Resistores reales. Código de colores. Valores comerciales*

Investigue acerca del código de colores de los resistores, sobre todo en lo que se refiere a las tolerancias. Tome unas cinco resistencias diferentes de las disponibles en el laboratorio. Determine mediante el código de colores el valor nominal de cada resistencia y su tolerancia.

Preguntas. Busque la lista de valores comerciales de resistencias, ¿exiten resis-

[5] Ésta quizás es una de las principales diferencias entre la física clásica y la física cuántica: el sistema de referencia (el observador) no afecta lo observado (la medición).

tores de 130 Ω? ¿por qué no se fabrican resistores de todos los valores posibles? ¿cómo podría obtener una resistencia de 130 Ω?

Tome un óhmetro (multímetro) y mida la resistencia de cada elemento (el resistor debe estar deconectado del resto del circuito y no energizado). Registre los valores obtenidos en una tabla. Verifique que los valores medidos están dentro del rango de valores nominales. Si encuentra discrepancias muy grandes, discútalas con el instructor o el profesor guía.

Preguntas. Como ya dijimos, los resistores tienen un rango de operación lineal dado por la potencia que permiten manejar (generalmente por debajo de 0.5 [W]). Los resistores que tomó, ¿en qué valor de potencia nominal trabajan? ¿Qué significa este valor en la práctica?

Laboratorio: *Medición de la tensión y la corriente con el multímetro*

Conecte la fuente de tensión a la red eléctrica, enciéndala y ajústela a 5 [V]. Tome una resistencia de las medidas anteriormente, no menor de 10 Ω ni mayor de 20 kΩ ("20 kilo-ohm" = 20000 Ω). Haga el montaje del circuito mostrado en la Figura 1.7.

Tome la precaución de apagar la fuente antes de hacer cualquier conexión con la misma. Después de verificar el montaje con el instructor, encienda la fuente y haga las mediciones de tensión y corriente que se indican en la Figura 1.8.

Con el valor de la tensión E y la resistencia R (tanto para el valor nominal como para el medido) obtenga, por la ley de Ohm, la corriente i. verifique que la tensión v medida es $v = 5$ [V]. Tabule y compare los valores teóricos con los prácticos. Cambie el valor de la fuente a 10 [V]. Rehaga todas las mediciones y los cálculos.

Tips–lab: Cuando mida la corriente es necesario desconectar una parte del circuito para incluir el amperímetro (generalmente se desconecta la rama en la que se hará la medición), *apague la fuente!* El amperímetro no debe conectarse a un circuito energizado (**el multímetro es un importante aparato de medición, investigue/pregunte sobre su funcionamiento y la forma de usarlo!**). Recuerde que siempre que sea necesario manipular el circuito (cambiar cables, conexiones, mover componentes) debe apagar la fuente para evitar cortos, daño a los equipos, fallas eléctricas o incluso un accidente para usted mismo.

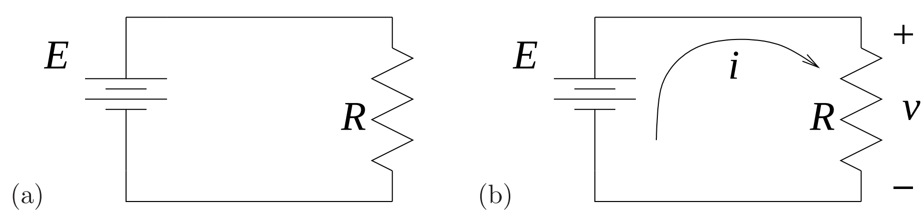


Figura 1.7: Primer circuito eléctrico: (a) diagrama esquemático, (b) tensión y corriente a medir

III Tensiones de los nodos (respecto a un nodo de referencia)

Un *circuito eléctrico* no es más que un arreglo o interconexión de elementos pasivos y activos, donde es posible reconocer *nodos*, *ramas* y *mallas*. Un ejemplo de un circuito

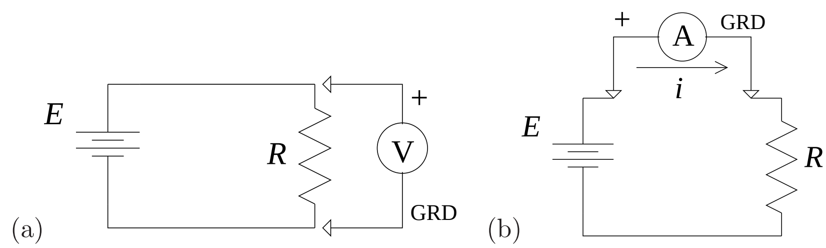


Figura 1.8: Primer circuito: (a) midiendo tensión, (b) midiendo corriente

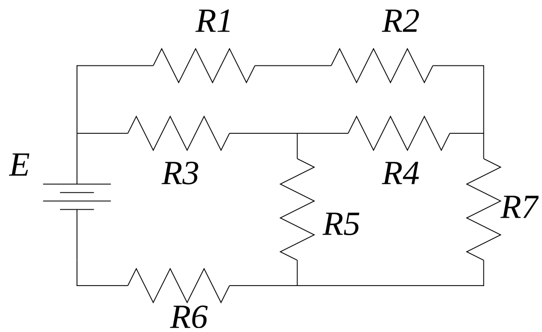


Figura 1.9: Ejemplo de un circuito eléctrico

eléctrico se muestra en la Figura 1.9. Está compuesto por una fuente de tensión E y siete resistores R_1 a R_7.

Un nodo es un punto o "una parte" de un circuito eléctrico donde se reúnen dos o más elemenos circuitales. Una rama es un conjunto de elementos conectados en serie, donde a lo sumo dos elementos conectados sólo se reúnen en un sólo nodo (las dos terminales de un mismo elemento no pueden estar conectadas a un mismo nodo). Una rama se reconoce porque al recorrerla con el lápiz de un lado a otro, el lápiz no se levanta y no pasa por nodos que conectan más de dos elementos. Una rama puede contener uno o más elementos.

Una malla constituye una secuencia cerrada de nodos, la cual comienza en un nodo y termina en el mismo nodo, sin pasar dos veces por el mismo elemento. En la Figura 1.10 se muestran ejemplos de estos lugares en un circuito eléctrico. Los nodos están indicados por las letras a, b, c, d, e, f. Observe que el nodo b interconecta a los resistores R_5, R_6 y R_7. El nodo e conecta los resistores R_2, R_4 y R_7. Una de las ramas va del nodo c al nodo e, pasa por el nodo f y contiene los resistores R_1 y R_2. Una malla típica sería la de la secuencia e-f-c-d-e (en la Figura 1.10 se indica el sentido de recorrido de la malla mediante una flecha que regresa a su punto de partida). A pesar de que la secuencia b-a-b termina en el mismo nodo, se pasa dos veces por R_6. En cambio, las secuencias b-d-e-b y a-c-f-e-b-a se corresponden con dos mallas diferentes.

Preguntas. ¿Qué otras mallas puede descubrir en este circuito? ¿Podría establecer una relación entre el número de nodos y mallas en un circuito? Véase la Figura 1.11.

En la Figura 1.12 se puede apreciar una forma de indicar cuando tres o más elementos llegan a un nodo, mediante un pequeño punto •.

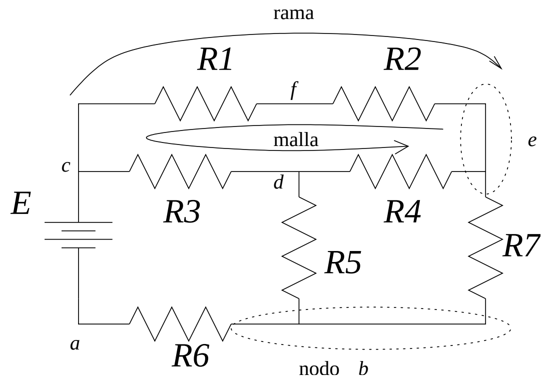


Figura 1.10: Nodos, ramas y mallas en un circuito eléctrico

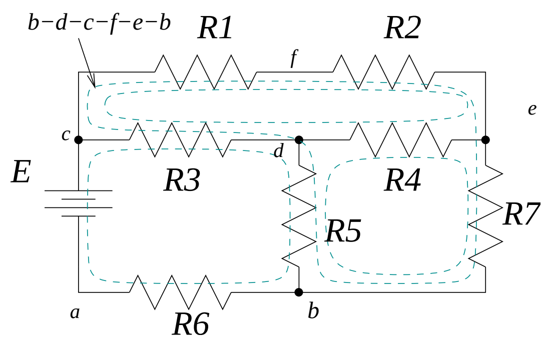


Figura 1.11: Varias mallas en el circuito estudiado. Observe en particular la malla *c*-*f*-*e*-*b*-*d*-*c*

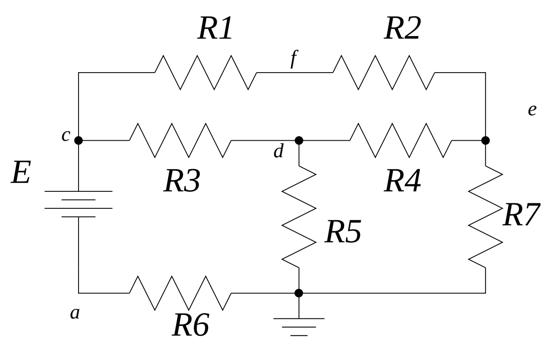


Figura 1.12: Nodos indicados con un •. Note el nodo de tierra o GRD (*ground*)

Vamos a introducir cierta notación. La tensión en una resistencia R_i, la denotaremos por v_{R_i} o simplemente v_i si es claro del contexto, p.e. la tensión en R_7 será v_{R_7} o v_7. Para que esté bien definida, es importante decir en que sentido se mide o indicar los signos '+' y '-'. En la Figura 1.12, la única tensión bien definida es la de la fuente v_E, con tensión '+' en el nodo c y tensión '-' en el nodo a. Suponiendo que la tensión en el nodo c es v_c y la tensión en el nodo a es v_a, sería fácil decir que $v_E = v_c - v_a$. Pero, el problema es ¿respecto a qué nodo estamos midiendo v_c y v_a?

Es muy común referir las tensiones de los diferentes nodos respecto a un nodo de referencia (único), llamado *nodo tierra* (en inglés se le llama también *datum*). En el circuito bajo estudio se ha reemplazado el nodo b por una "tierra" de referencia. Por ejemplo, v_a entonces denota la tensión medida desde el nodo a (terminal '+' del multímetro) hasta la tierra (terminal '-' o GRD del multímetro). En este caso, $v_b = 0$ [V] (los dos terminales del multímetro estarían en *corto*). Como ya habíamos dicho, la tensión en un elemento dado sería la resta de las tensiones entre los dos nodos adyacentes, independientemente del nodo tierra escogido (si el nodo tierra es el a entonces $V_a' = 0$ [V] y los valores de los nodos cambiarán a, p.e., V_b', V_c', etc., pero $v_E = v_c - v_a = V_c' - V_a' = V_c'$ sigue teniendo el mismo valor).

LABORATORIO: *Medición de tensiones respecto a un nodo de referencia.*

Tome entre cinco y diez resistencias con valores nominales y medidos (organícelos en una tabla). Haga un diagrama circuito, conectando una fuente de $E = 5$ [V]. Verifique el diagrama con el instructor, quien le indicará hacer uno nuevo en caso de necesidad. Conecte la fuente a la red eléctrica pero déjela apagada hasta que termine de hacer el montaje. Cuando termine, verifique las conexiones del circuito con el multímetro (los multímetros traen un indicador de corto circuito). Siga la regla: las *conexiones* de los elementos conectados a un mismo nodo *deben estar en corto*. Antes de encender la fuente, llame al instructor y verifique nuevamente. Encienda la fuente y comience las mediciones. Anote las mediciones en su cuaderno (indique además fecha y descripción de la práctica) Empiece por la fuente, mida la tensión entre sus terminales (el valor mostrado en la pantalla del multímetro debe ser aproximadamente los 5 [V], si no es así ajuste la fuente). Si la medición está bien hecha y el circuito está funcionando correctamente, Debe obtener un valor positivo de +5 [V] (si el signo es negativo, está haciendo la medición al revés).

Escoja un nodo de referencia (tierra). Mida las tensiones de todos los nodos, respecto al modo de referencia (terminal '+' del multímetro en el nodo deseado y el terminal negativo o GRD siempre en el nodo de referencia). Tabule los valores obtenidos y obtenga las tensiones de todos los componentes del circuito por simple cálculo respecto las tensiones de los nodos. Mida las tensiones en cada componente, verifique que el valor obtenido es el mismo que el que acaba de calcular (puede haber un error en el signo, en cuyo caso está haciendo la medición al revés). Con los valores de tensión y resistencia medidos calcule la corriente que pasa por cada componente. Verifique la siguiente regla: por una rama dada sólo puede pasar una y sóla una corriente. Mida las corrientes en cada componente. Por la regla anterior, si dos componentes que están en la misma rama, la corriente de los mismos sólo se mide una vez. Tabule y compare todos los valores obtenidos (teórico y práctico). Calcule los errores absolutos y porcentuales. Los errores no deberían sobrepasar el 10%. Organice los datos en la tabla y presentela al instructor. PREGUNTAS. ¿Cuál cree que es el objetivo de esta práctica? ¿Qué aprendió?

Comentario: La técnica de medición por nodos en muy útil al momento de emplear, por ejemplo, el osciloscopio.

IV Leyes de Kirchhoff

Uno de los objetivos de este curso es aprender a determinar las tensiones y corrientes en cada elemento del circuito, dadas sus características típicas. Considere la Figura 1.9, un problema a resolver sería conocer el valor de la corriente I que pasa a través de la fuente E, dado el valor en [V] de dicha fuente y los valores de las resistencias R_1 a las R_7. Veremos a continuación que este problema está bien definido.

1 Problema Dado un circuito $\mathcal{C}$, con fuentes de tensión independientes $E_1, \ldots, E_n$ y resistores $R_1, \ldots, R_m$, encuentre las tensiones $v_{R_1}, \ldots, v_{R_m}$ de cada elemento resistivo y las corrientes $i_{E_1}, \ldots, i_{E_n}, i_{R_1}, \ldots, i_{R_m}$.

Este problema lo vamos a extender a fuentes independientes de corriente y fuentes dependientes de tensión y de corriente, tanto *ideales* como *no ideales* o "reales".

Las *leyes de Kirchhoff*[6] nos permiten establecer las relaciones necesarias para encontrar las corrientes y las tensiones de cada elemento de un circuito eléctrico.

2 Definición (Ley de las tensiones de Kirchhoff, LTK) La suma algebraica de las tensiones en una *malla* es cero.

Considere la Figura 1.13. Haciendo la lectura en el sentido de las agujas del reloj[7], Figura 1.13a, la ecuación resultante que modela las tensiones en esta malla está dada por:

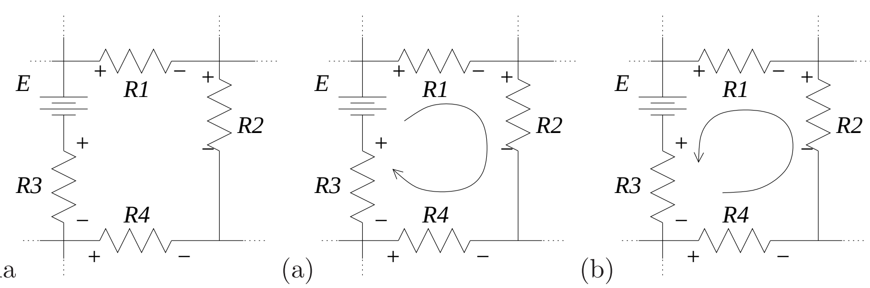
$$-E + v_{R_1} + v_{R_2} - v_{R_4} - v_{R_3} = 0$$

donde la tensión de la fuente $v_f(t)$ se reemplaza por su valor constante $v_f(t) = E$ [V]. Observe que, aún después de fijar la convención, los signos dependen de cómo se haga el recorrido de la malla.

Si seguimos la Figura 1.13b, en el sentido contrario a las agujas del reloj, comenzando en la resistencia R_4, se obtiene:

$$v_{R_4} - v_{R_2} - v_{R_1} + E + v_{R_3} = 0$$

que es exactamente la misma ecuación anterior al multiplicar por -1 y reacomodando los términos.



malla (a) (b)

Figura 1.13: Ley de las tensiones de Kirchhoff.

[6]Llamadas así en honor al físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887).
[7]Afortunadamente todavía existen relojes con minuteros y segunderos que indican la hora.

3 Definición (Ley de las corrientes de Kirchhoff, LCK) La suma algebraica de las corrientes en un *nodo* es cero.

Además de escoger la convención de signos de las tensiones, se debe escoger en cada rama el sentido de la corriente. Véase la Figura 1.14. Fíjese que en este caso, algunas corrientes van en el sentido de la convención usual (entrando por la terminal '+'), y otras se han escogido deliberadamente en sentido contrario (esto es para confirmar que el resultado será correcto a pesar de que la convención no parezca la adecuada).

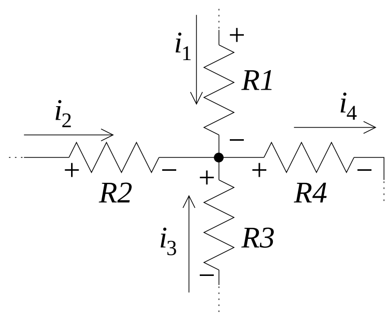


Figura 1.14: Ley de las corrientes de Kirchhoff.

Igual que en el caso anterior (la LCK es el dual[8] de la LTK), debemos escoger un sentido de lectura. Si las corrientes que **entran al nodo** se escogen como *positivas*, las que **salen** son *negativas*, por lo tanto se obtiene la siguiente relación:

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

Si se lee al revés (las corrientes que salen del nodo son positivas), se obtiene

$$-i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

(misma ecuación anterior, signo cambiado.)

Interpretación hidráulica: la LCK se puede ver como el agua en las redes de tuberias. El agua que llega al nodo (empalme) tiene que salir por algún lado. Véase (Schiller 2007, Figura 252, *correspondance of electricity and water flow*). De las ecuaciones anteriores resulta $i_4 = i_1 + i_2 + i_3$, esto es, las tres corrientes que entran al nodo salen[9] gracias a i_4.

Corriente en una rama: por una misma rama circula una sola corriente. Véase la Figura 1.15 (los dos resistores mostrados decimos que están en *serie*). El nodo a tiene solamente dos elementos conectados (es una rama). La LCK en el nodo a resulta en la relación $i_n - i_m = 0$, o lo que es lo mismo $i_n = i_m$, es decir, la corriente que entra al nodo tiene que ser necesariamente igual a la que sale.

[8] De aquí en adelante veremos que hay muchas relaciones duales en la teoría de circuitos.

[9] Puede darse el caso de que al escoger los sentidos de las corrientes todas entren o todas salgan, *no se preocupe*, la LCK siempre se aplica. Físicamente resultará que siempre habrá algunas corrientes que entran y otras que salen. En el caso de las mallas es igual, siempre habrá elementos que aportan tensión a la malla y otros que la toman. Vea los ejemplos más adelante y **verifíquelo usted mismo** en sus ejercicios.

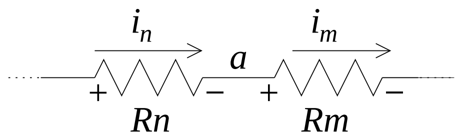


Figura 1.15: Corriente en una rama, $i_n = i_m$

4 Ejemplo Vamos a retomar el circuito anterior, ahora mostrado en la Figura 1.16a. En este circuito hay seis nodos, seis ramas y básicamente tres mallas. Necesitamos determinar siete tensiones en las siete resistencias y las corrientes que pasan por los ocho componentes. En el caso de las corrientes, tenemos dos ramas con dos componentes, lo cual reduce el número de corrientes por determinar a seis.

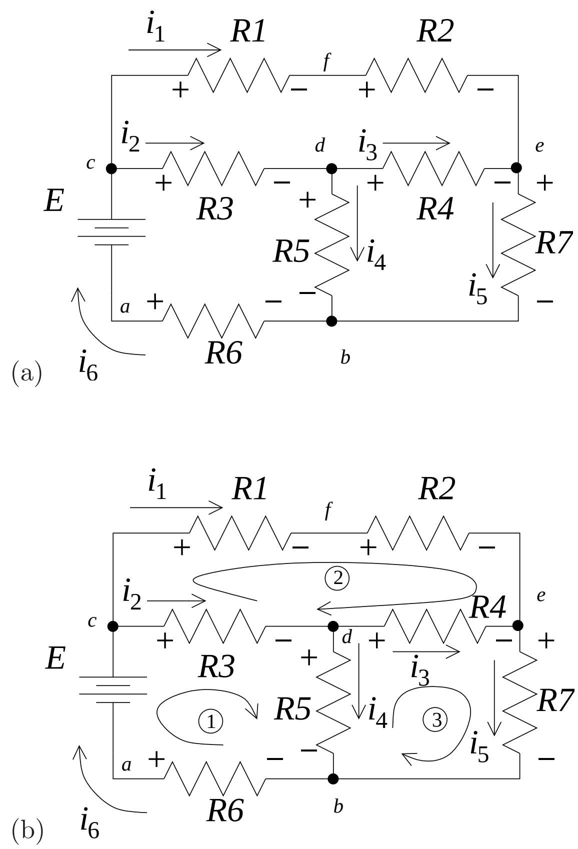


Figura 1.16: Circuito eléctrico estudiado. En (a) se indica la convención de signos de las tensiones y los sentidos de las corrientes. En (b) se indican las mallas empleadas.

Valores conocidos: $E = 10$ V, $R_1 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_4 = 1000\ \Omega$, $R_5 = 200\ \Omega$, $R_6 = R_7 = 150\ \Omega$.

Valores a determinar: $v_1, \ldots, v_7$, $i_1, \ldots, i_6$, donde $i_1 = i_{R_1} = i_{R_2}$, $i_6 = i_{R_6} = i_E$, $i_2 = i_{R_3}$, $i_3 = i_{R_4}$, $i_4 = i_{R_5}$, $i_5 = i_{R_7}$.

LTK: en la Figura 1.16b se indican las mallas a las que vamos a aplicar la LTK. Tenemos en la malla ①,

$$-v_6 - E + v_3 + v_5 = 0 \tag{1.3}$$

donde la fuente de tensión está dada por $v_f(t) = E$ [V].

En la malla ②,

$$-v_3 + v_1 + v_2 - v_4 = 0 \tag{1.4}$$

En la malla ③,

$$-v_5 + v_4 + v_7 = 0 \tag{1.5}$$

Veamos que son tres el mínimo de mallas que necesitamos. Supongamos que tomamos la malla *a-c-d-e-b-a*. Tenemos:

$$-E + v_3 + v_4 + v_7 - v_6 = 0$$

Observe que esta última resulta de la suma de las ecuaciones (1.3) y (1.5), después de reordenar:

$$\xrightarrow{(1.3)\,+\,(1.5)} \quad -v_6 - E + v_3 + v_4 + v_7 = 0$$

En general, cualquier otra malla será combinación lineal de las tres anteriores, (1.3), (1.4) y (1.5). (**verifíquelo!**) Así tenemos, para comenzar, tres ecuaciones, pero tenemos trece incógnitas, ¿de dónde salen las otras diez ecuaciones que necesitamos?

LCK: Ya empleamos los nodos a y f implícitamente cuando comenzamos. Veremos que de los cuatro nodos restantes sólo necesitamos tres. Tomemos los nodos c, d y e. Vamos a asumir que las corrientes que entran son positivas. Del nodo c se tiene:

$$i_6 - i_1 - i_2 = 0 \tag{1.6}$$

Del nodo d,

$$i_2 - i_3 - i_4 = 0 \tag{1.7}$$

Del nodo e,

$$i_1 + i_3 - i_5 = 0 \tag{1.8}$$

La relación que se obtiene en el nodo b depende linealmente de las tres anteriores:

$$\xrightarrow{-(c+d+e)} \quad i_4 + i_5 - i_6 = 0 \tag{1.9}$$

Aquí vamos a introducir el concepto de *supernodo*. En la Figura 1.17 encerramos los nodos b y d (en cierta forma, son los extremos de la elipse mostrada). Uno puede preguntarse ¿qué corrientes entran a este supernodo? (esto es i_2 e i_5) ¿qué corrientes salen? (i_3 e i_6). Entonces podríamos aplicar la LCK al supernodo bd:

$$i_2 + i_5 - i_3 - i_6 = 0$$

Este supernodo resulta de la suma de los nodos b y d obtenidos anteriormente, (1.9) y (1.7):

$$\xrightarrow{b+d} \quad i_2 + i_5 - i_3 - i_6 = 0$$

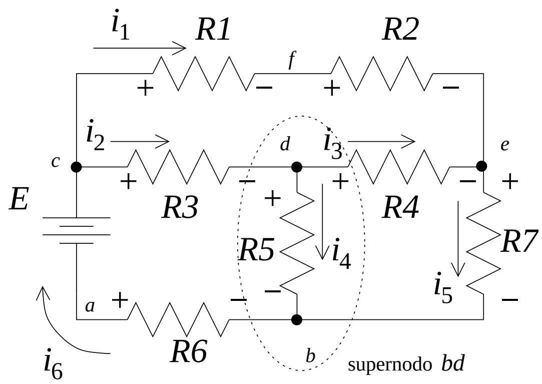


Figura 1.17: Supernodo bd

Con (1.3)–(1.8) ya tenemos seis ecuaciones, ahora nos faltan siete (13 incógnitas menos 6 ecuaciones = 7 ecuaciones faltantes). ¿De dónde obtenemos las siete ecuaciones que faltan? *Respuesta:* la ley de Ohm. Tenemos una ecuación por cada resistor,

$$\begin{aligned} &v_1 = R_1 i_1, \quad v_2 = R_2 i_1, \quad v_3 = R_3 i_2, \\ &v_4 = R_4 i_3, \quad v_5 = R_5 i_4, \quad v_7 = R_7 i_5 \end{aligned} \tag{1.10}$$

y

$$v_6 = -R_6 i_6 \tag{1.11}$$

Observe que todas las relaciones tienen signo positivo con excepción de esta última. ¿En qué se diferencia el resistor R_6 de los demás en el circuito de la Figura 1.16a? *Respuesta:* en todos los demás resistores, la relación de signos y sentido de las corrientes son las de un elemento pasivo. Para R_6, la corriente i_6 va en sentido contrario[10] al común de un elemento pasivo.

Con las ecuaciones (1.10) y (1.11) se completan las 13 ecuaciones ncesarias para determinar las 13 incógnitas:

$$\begin{aligned} -v_6 - E + v_3 + v_5 &= 0 \\ -v_3 + v_1 + v_2 - v_4 &= 0 \\ -v_5 + v_4 + v_7 &= 0 \\ i_6 - i_1 - i_2 &= 0 \\ i_2 - i_3 - i_4 &= 0 \\ i_1 + i_3 - i_5 &= 0 \\ v_1 = R_1 i_1, v_2 = R_2 i_1, v_3 &= R_3 i_2 \\ v_4 = R_4 i_3, v_5 = R_5 i_4, v_7 = R_7 i_5, v_6 &= -R_6 i_6 \end{aligned}$$

Reemplazando las siete últimas ecuaciones en las tres primeras se obtiene un sis-

[10] Una manera de acordarse de la relación de signos: fíjese que la corriente i_6 “entra” al resistor R_6 por el lado negativo, entonces debe llevar signo ‘-’.

tema de seis ecuaciones y seis incógnitas:

$$
\begin{aligned}
+R_3 i_2 \qquad + R_5 i_4 \qquad + R_6 i_6 &= E \\
(R_1+R_2)i_1 - R_3 i_2 - R_4 i_3 \qquad &= 0 \\
+ R_4 i_3 - R_5 i_4 + R_7 i_5 \qquad &= 0 \\
-i_1 \quad -i_2 \qquad + \quad i_6 &= 0 \\
i_2 \quad -i_3 \quad -i_4 \qquad &= 0 \\
i_1 \quad + \quad i_3 \quad -i_5 \qquad &= 0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Para resolver este sistema de ecuaciones vamos aplicar el método de Gauss.[11] Véase (Hefferon 2006). En cada paso que haremos, indicaremos la posición y la operación que hagamos entre las filas, por ejemplo, de las ecuaciones anteriores, intercabiamos la fila 6 ρ_6 y la primera ρ_1:

$$
\xrightarrow{\rho_1 \leftrightarrow \rho_6}
\begin{aligned}
i_1 \quad + \quad i_3 \quad -i_5 \qquad &= 0 \\
(R_1+R_2)i_1 - R_3 i_2 - R_4 i_3 \qquad &= 0 \\
+ R_4 i_3 - R_5 i_4 + R_7 i_5 \qquad &= 0 \\
-i_1 \quad -i_2 \qquad + \quad i_6 &= 0 \\
i_2 \quad -i_3 \quad -i_4 \qquad &= 0 \\
+R_3 i_2 \qquad + R_5 i_4 \qquad + R_6 i_6 &= E
\end{aligned}
$$

Ahora, a la segunda fila ρ_2 le sumamos la primera ρ_1, multiplicada por $-(R_1+R_2)$:

$$
\xrightarrow{-(R_1+R_2)\rho_1+\rho_2}
\begin{aligned}
i_1 \quad + \quad i_3 \quad -i_5 \qquad &= 0 \\
-R_3 i_2 - (R_4+R_1+R_2)i_3 \quad + (R_1+R_2)i_5 \qquad &= 0 \\
+ \quad R_4 i_3 - R_5 i_4 + \quad R_7 i_5 \qquad &= 0 \\
-i_1 \quad -i_2 \qquad + \quad i_6 &= 0 \\
i_2 \quad -i_3 \quad -i_4 \qquad &= 0 \\
+R_3 i_2 \qquad + R_5 i_4 \qquad + R_6 i_6 &= E
\end{aligned}
$$

A ρ_4 le sumamos ρ_1:

$$
\xrightarrow{\rho_1+\rho_4}
\begin{aligned}
i_1 \quad + \quad i_3 \quad -i_5 \qquad &= 0 \\
-R_3 i_2 - (R_4+R_1+R_2)i_3 \quad + (R_1+R_2)i_5 \qquad &= 0 \\
+ \quad R_4 i_3 - R_5 i_4 + \quad R_7 i_5 \qquad &= 0 \\
-i_2 + \quad i_3 \quad -i_5 + \quad i_6 &= 0 \\
i_2 \quad -i_3 \quad -i_4 \qquad &= 0 \\
+R_3 i_2 \qquad + R_5 i_4 \qquad + R_6 i_6 &= E
\end{aligned}
$$

Intercambiamos ρ_2 y ρ_5:

$$
\xrightarrow{\rho_2 \leftrightarrow \rho_5}
\begin{aligned}
i_1 \quad + \quad i_3 \quad -i_5 \qquad &= 0 \\
i_2 \quad -i_3 \quad -i_4 \qquad &= 0 \\
+ \quad R_4 i_3 - R_5 i_4 + \quad R_7 i_5 \qquad &= 0 \\
-i_2 + \quad i_3 \quad -i_5 + \quad i_6 &= 0 \\
-R_3 i_2 - (R_4+R_1+R_2)i_3 \quad + (R_1+R_2)i_5 \qquad &= 0 \\
+R_3 i_2 \qquad + R_5 i_4 \qquad + R_6 i_6 &= E
\end{aligned}
$$

[11] La técnica de *eliminación gaussiana* es llamada así en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855), quien popularizó este método.

Ahora:

$$
\begin{array}{crcrcrcrcrcl}
 & i_1 & + & i_3 & & & & -i_5 & & & = & 0 \\
\xrightarrow{\rho_2+\rho_4} & & i_2 & -i_3 & & -i_4 & & & & & = & 0 \\
\xrightarrow{R_3\rho_2+\rho_5} & & + & R_4 i_3 - & & R_5 i_4 + & & R_7 i_5 & & & = & 0 \\
 & & & & & -i_4 & & -i_5 + & & i_6 & = & 0 \\
\xrightarrow{-R_3\rho_2+\rho_6} & & - & R_{1,4} i_3 - & & R_3 i_4 + & (R_1+R_2) & i_5 & & & = & 0 \\
 & & + & R_3 i_3 + & (R_5+R_3) & i_4 & & & + & R_6 i_6 & = & E
\end{array}
$$

donde $R_{1,4} = (R_4 + R_1 + R_2 + R_3)$.

Con la fila ρ_3:

$$
\begin{array}{crcrrrrcl}
 & i_1 & + & i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
\xrightarrow{\frac{R_{1,4}}{R_4}\rho_3+\rho_5} & & i_2 & -i_3 & -i_4 & & & = & 0 \\
 & & & + R_4 i_3 - & R_5 i_4 + & R_7 i_5 & & = & 0 \\
\xrightarrow{-\frac{R_3}{R_4}\rho_3+\rho_6} & & & & -i_4 & -i_5 + & i_6 & = & 0 \\
 & & & & -(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5) i_4 + & R_{1,7} i_5 & & = & 0 \\
 & & & & + (R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4} R_5) i_4 & -\frac{R_3}{R_4} R_7 i_5 + & R_6 i_6 & = & E
\end{array}
$$

donde $R_{1,7} = (R_1 + R_2 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_7)$.

Con la fila ρ_4:

$$
\begin{array}{crcrrrrcl}
 & i_1 & + & i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
\xrightarrow{-(R_3+\frac{R_{1,4}}{R_4}R_5)\rho_4+\rho_5} & & i_2 & -i_3 & -i_4 & & & = & 0 \\
 & & & + R_4 i_3 - & R_5 i_4 + & R_7 i_5 & & = & 0 \\
\xrightarrow{(R_5+R_3+\frac{R_3}{R_4}R_5)\rho_4+\rho_6} & & & & -i_4 & -i_5 + & i_6 & = & 0 \\
 & & & & + & R_{1,5} i_5 & -R_{3,5} i_6 & = & 0 \\
 & & & & & -R_{7,5} i_5 + & R_{6,5} i_6 & = & E
\end{array}
\qquad (1.13)
$$

donde $R_{1,5} = (R_1 + R_2 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_7 + R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5)$, $R_{7,5} = (\frac{R_3}{R_4} R_7 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4} R_5)$, $R_{6,5} = (R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4} R_5)$ y $R_{3,5} = (R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5)$.

Las dos últimas ecuaciones se pueden resolver como un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$
\begin{aligned}
i_6 &= \frac{\begin{vmatrix} R_{1,5} & 0 \\ -R_{7,5} & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{1,5} & -(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5) \\ -R_{7,5} & (R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4} R_5) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(R_1 + R_2 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_7 + R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5) E}{R_{1,5}(R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4} R_5) - R_{7,5}(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4} R_5)} = \frac{R^* E}{R}
\end{aligned}
$$

donde $R^* = (R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_7 + R_1R_7 + R_2R_7 + R_4R_7 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_1R_5 + R_2R_5 + R_4R_5)$ y $R = R_3R_5R_7 + R_3R_1R_5 + R_3R_2R_5 + R_6R_3R_5 + R_3R_1R_4 + R_3R_2R_4 + R_3R_4R_7 + R_6R_3R_4 + R_6R_1R_4 + R_6R_2R_4 + R_6R_4R_7 + R_6R_1R_5 + R_6R_2R_5 + R_3R_1R_7 + R_3R_2R_7 + R_6R_3R_7 + R_6R_1R_7 + R_6R_2R_7 + R_5R_1R_4 + R_5R_2R_4 + R_5R_7R_4 + R_5R_6R_4 + R_5R_1R_7 + R_5R_2R_7$.

Tabla 1.1: Valores numéricos del Ejemplo IV.4

	Tensión [V]	Corriente [A]	Potencia [W]
R_1	0.7572540694	0.01514508139	
R_2	1.514508139	0.01514508139	
R_3	0.9978768577	0.01995753715	
R_4	1.273885350	0.001273885350	
R_5	3.736730361	0.01868365180	
R_6	-5.265392781	0.03510261854	
R_7	2.462845011	0.01641896674	
E	10.0	0.03510261854	
		potencia total P_T	

$$i_5 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4}R_5) \\ E & (R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4}R_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{1,5} & -(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4}R_5) \\ -R_{7,5} & (R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4}R_5) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(R_1 + R_2 + \frac{R_{1,4}}{R_4}R_7 + R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4}R_5)E}{R_{1,5}(R_6 + R_5 + R_3 + \frac{R_3}{R_4}R_5) - R_{7,5}(R_3 + \frac{R_{1,4}}{R_4}R_5)} = \frac{R^*E}{R}$$

A partir del sistema triangular (1.13), se calculan sucesivamente $i_4 = i_6 - i_5$, $i_3 = \frac{R_5}{R_4}i_4 - \frac{R_7}{R_4}i_5$, $i_2 = i_3 + i_4$, $i_1 = i_5 - i_3$.

Los valores numéricos (**verifíque estos resultados!**) se muestran en la Tabla 1.1. Tenemos $i_6 = 0.03510261854$ [A], $i_5 = 0.01641896674$ [A], $i_4 = 0.01868365180$ [A], $i_3 = 0.001273885350$ [A], $i_2 = 0.01995753715$ [A], $i_1 = 0.01514508139$ [A]. Las tensiones de cada componente se obtienen de (1.10) y (1.11).

Interpretación de los resultados: hay varias cosas interesantes en este ejemplo que vale la pena analizar. La corriente i_3 en la resistencia R_4 es la más pequeña. Esto tiene que ver con que R_4 tiene el valor de resistencia más grande (es la que "más" se opone al paso de la corriente).

Las corrientes obtenidas son todas > 0, lo que indica que los sentidos de las corrientes fueron escogidos adecuadamente. Las tensiones en los elementos son positivas, a excepción de R_6. El signo menos indica que la ubicación de los signos '+' y '-' es al revés de la real (esto se confirma si observamos el sentido de la corriente).

Calcule las potencias de cada elemento y anótelas en la tercera columna de la Tabla 1.1. Indique cada potencia con su signo respectivo de acuerdo a la convención propuesta en la Definición II.1. PREGUNTA. ¿Algún elemento sobrepasa la potencia de 0.25 [W]?

Piénselo un poco

La potencia en un resistor, usando la ley de Ohm $v = Ri$ (o en la forma $i = \frac{v}{R}$), está dada por $P = -vi = -Ri^2 = -\frac{v^2}{R}$.

Por ejemplo, $P_{R_1} = -0.7572540694 \cdot 0.01514508139 = -50 \cdot 0.01514508139^2 = -0.01146867451$ [W].

Sume las potencias de todos los elementos y anote el resultado P_T en la última línea de la tabla. PREGUNTAS. ¿Cuál fue el resultado[12]? ¿Qué piensa al respecto? ¿Por qué obtuvo este valor? Esto está relacionado con la conservación de la energía. Comentaremos algo más en la siguiente sección.

5 Ejemplo Asuma que los resistores del circuito mostrado en la Figura 1.18 pueden resistir a lo sumo potencias de hasta 0.25 [W], $R_1 = 120\ \Omega$, $R_2 = 390\ \Omega$, $R_3 = 220\ \Omega$. La flecha escrita sobre la fuente indica que es una *fuente variable*. ¿Cuál es el valor máximo de tensión que puede tener la fuente? Asuma que V_f sólo posee valores positivos.

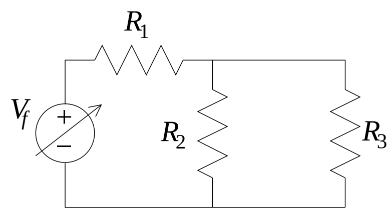


Figura 1.18: Circuito del Ejemplo IV.5

Observe que en este problema V_f es desconocido. Nos dan una indicación respecto a la potencia máxima en cada resistor.

Solución: Vamos a calcular la potencia en cada resistor. Para ello, obtenemos la tensión v_k y corriente i_k en cada resistor, $k = 1, 2, 3$. Véase la Figura 1.19.

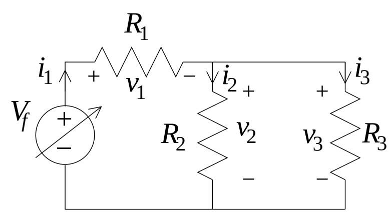


Figura 1.19: Circuito del Ejemplo IV.5

Verifique que los valores de las corrientes están dados por:

$$i_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} V_f$$
$$i_2 = \frac{R_3}{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} V_f$$
$$i_3 = \frac{R_2}{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3} V_f$$

De esta forma las potencias en cada resistor están dadas por (recuerde que la potencia

[12]Debe ser $P_T \approx 0$ [W] o un valor muy pequeño, use todas las cifras significativas.

en un resistor es igual a $P = VI = RI \cdot I = RI^2$):

$$P_1 = 0.001766227602V_f^2$$
$$P_2 = 0.0007466476801V_f^2$$
$$P_3 = 0.001323602706V_f^2$$

El resistor que disipa mayor potencia es el R_1, entonces va a ser el resistor que va a limitar a los demás. Por lo tanto, hacemos $P_1 \leq 0.25$ [W], lo que nos da:

$$V_f \leq 11.89725227 \text{ [V]} \qquad \text{(se tomó el valor positivo de la raíz cuadrada)}$$

esto es, $P_1 = 0.25$ [W], $P_2 = 0.1056839559$ [W] y $P_3 = 0.1873488309$ [W].

Laboratorio: *Verificación de las leyes de Kirchoff (Medición de la corriente con el amperímetro y verificación de la LCK)*

Considere el circuito mostrado en la Figura 1.20. Tiene libertad de escoger los valores de la fuente de tensión ($\neq 10$ [V]) y los ocho resistores. Utilice resistores entre 100 Ω y 10 kΩ (recuerde que los valores de los resistores están restringidos a una lista, generalmente, correspondiente a la serie E12 de 10% de tolerancia, vea el Ejercicio 4).

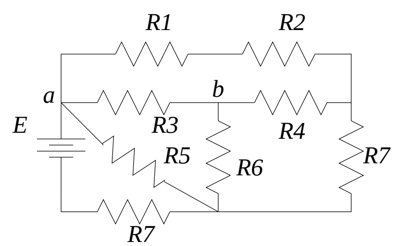


Figura 1.20: Diagrama del circuito eléctrico para el laboratorio

Antes de hacer el montaje obtenga una tabla con los valores de tensiones y corrientes calculados para cada componente, para su comparación con los valores prácticos.

Haga el montaje del circuito. Para cada malla, verifique la LTK utilizando el multímetro (conexión en paralelo). En cada nodo, verifique la LCK. Observe que la medición de cada corriente es de forma invasiva en el circuito (el multímetro, funcionando como amperímetro, se conecta en serie). Tenga el cuidado de apagar *siempre* la fuente cuando haga conexiones y desconexiones entre los elementos del circuito.

Piénselo un poco

Aprenda buenas técnicas de medición. Consulte con su instructor o con el técnico del laboratorio. La medición de las corriente siempre se hace en serie, no hay forma de hacerla en paralelo.

Preguntas. Suponga que desea medir la corriente que pasa por R_3. En lugar de colocar el amperímetro en serie, colóquelo en paralelo, se decir, conéctelo entre los nodos a y b ¿Qué observa? Debe obtener un valor diferente a la corriente i_{R_3} calculada, ¿por qué ocurre? Explique el fenómeno que está pasando. Vea el Ejercicio 10.

Recomendaciones al instructor: cambie la topología (la forma y el número de componentes) del circuito de esta práctica. Agregue las preguntas, indicaciones o comentarios adicionales que considere necesarios. Vea la hoja del laboratorio de esta práctica al final del texto.

V Matriz de incidencia. Teorema de Tellegen. Conservación de la energía

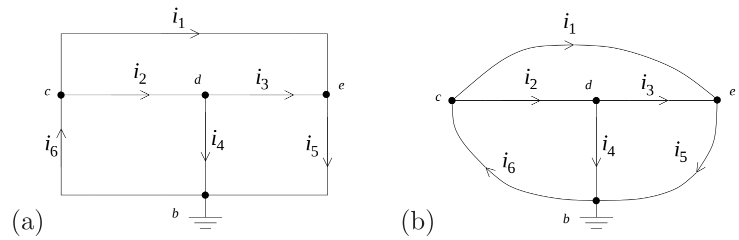


Figura 1.21: Grafo dirigido del circuito estudiado hasta ahora. Se muestran dos representaciones equivalentes

El circuito de la Figura 1.16 se puede representar mediante el *grafo dirigido* de la Figura 1.21. En el grafo dirigido sólo se consideran las ramas y los nodos. También indicamos el nodo de tierra (nodo b en este caso).

Aplicando la LCK al grafo dirigido se obtienen las ecuaciones (1.6)–(1.8):

$$\begin{array}{rrrrrrl} -i_1 & -i_2 & & & & +\,i_6 & =0 \\ & i_2 & -i_3 & -i_4 & & & =0 \\ i_1 & & +\;\; i_3 & & -i_5 & & =0 \end{array}$$

o en forma matricial

$$A\vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

El vector $\vec{i}$ representa las *corrientes de rama* del circuito. A la matriz A se le llama *matriz de incidencia*[13]. Considere que disponde de r ramas y n nodos. El número de filas de la matriz A corresponde a $n-1$ y el número de columnas es igual al número de ramas r, $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times r}$.

Vamos a considerar ahora las tensiones "en cada rama", asociándolas con las tensiones en los nodos. De la Figura 1.21, definimos por ejemplo $e_2 = v_c - v_d$. Entonces,

[13]Las matrices de incidencia son importantes en Automatización, en el caso, por ejemplo, de las redes de Petri.

se tienen seis *tensiones de rama*, una por cada rama, que se escriben

$$
\begin{aligned}
e_1 &= v_c - v_e \\
e_2 &= v_c - v_d \\
e_3 &= v_d - v_e \\
e_4 &= v_d \\
e_5 &= v_e \\
e_6 &= -v_c
\end{aligned}
$$

En forma matricial

$$
\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ v_d \\ v_e \end{pmatrix}
$$

es decir, aparece de nuevo la matriz de incidencia A

$$
\vec{e} = -A^T \vec{v} \quad \text{donde} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} \;\; ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_c \\ v_d \\ v_e \end{pmatrix} \tag{1.15}
$$

y $A^T \in \mathbb{R}^{r \times (n-1)}$ es la *matriz traspuesta* de A. El vector $\vec{v}$ de tensiones en los nodos tiene dimensión $\dim \vec{v} = n - 1$. La dimensión de $\vec{e}$ es r.

Las relaciones (1.14) y (1.15) nos permiten demostrar el siguiente teorema muy útil en circuitos eléctricos. Véase (Chua et al. 1987, Cap. 1).

1 Teorema (Teorema de Tellegen) Considere un circuito arbitrario, cuyo grafo dirigido $\mathcal{G}$ posee r ramas. Sea $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_r)^T$ cualquier conjunto de corrientes de rama que satisfacen la LCK para $\mathcal{G}$ y sea $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_r)^T$ cualquier conjunto de las tensiones de rama que satisfacen la LTK para $\mathcal{G}$, entonces

$$
\sum_{k=1}^{r} e_k i_k = 0 \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \vec{e}^T \vec{i} = 0 \tag{1.16}
$$

Prueba. Usando (1.15), tenemos

$$
\vec{e}^T \vec{i} = (-A^T \vec{v})^T \vec{i} = -\vec{v}^T A \vec{i} = -\vec{v}^T (A\vec{i}) = -\vec{v}^T \vec{0} = 0
$$

La última parte surge al emplear (1.14). QED

La sumatoria $\sum_{k=1}^{r} e_k i_k$ en la relación (1.16) puede interpretarse como la suma de las potencias en cada rama (incluyendo, por supuesto, elementos pasivos o activos). Este teorema es válido independientemente de los elementos circuitos o de la forma como es alimentado.

De esta forma, el teorema de Tellegen[14] se puede interpretar físicamente como la *conservación de energía* dentro de un circuito eléctrico: **la energía que se entrega al circuito es igual a la energía que se consume**. Véase la última parte del Ejemplo IV.4, la suma algebraica de la potencia entregada y consumida es cero. Por lo tanto, la potencia total resulta $P_T \equiv 0$ [W].

Inventing a good exercise, one that enlightens
as well as tests, is a creative act, and hard work.
Jim Hefferon

Ejercicios

1.1 Considere la Figura 1.22a (véase el Ejemplo IV.4). Calcule las tensiones de cada nodo, v_a hasta v_e respecto al nodo tierra "0".

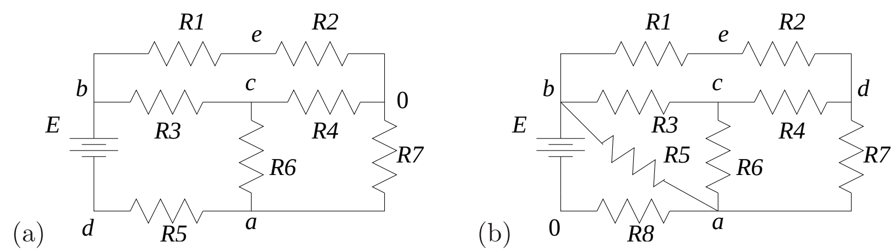


Figura 1.22: Diagramas de circuitos eléctricos. Ejercicios 1 y 2

1.2 Considere la Figura 1.22b. Calcule las tensiones y corrientes en cada nodo para los siguientes valores: $E = 7.5$ [V], $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_4 = R_3 = 200\ \Omega$, $R_5 = 100\ \Omega$, $R_6 = R_8 = 25\ \Omega$, $R_7 = 150\ \Omega$ Calcule las tensiones de cada nodo, v_a hasta v_e respecto al nodo tierra "0". ¿Cuál es el valor de v_b? (esta pregunta se puede responder sin hacer cálculos).

✓ **1.3** Una *fuente independiente de corriente*, mostrada en la Figura 1.23 con su correspondiente curva característica *i*-*v*, es aquella para la cual la corriente es constante, independientemente del valor de tensión que haya entre sus terminales. La fuente de corriente la vamos a denotar por $i_f(t)$. En este caso, $i_f(t) = I$ [A].

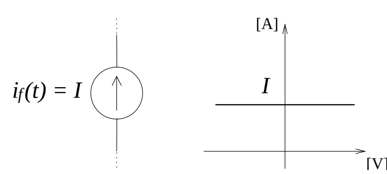


Figura 1.23: Fuente independiente de corriente. Se muestra la característica *i*-*v*

Aplique las leyes de Kirchhoff al circuito de la Figura 1.24. Se dispone de los siguientes valores: $I = 1.5$ [A], $R_1 = 1000\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_4 = R_3 = 500\ \Omega$,

[14] Debido a Bernardus D. H. Tellegen (1900–1990) de la compañía Philips, lo publicó en 1952: B. D. H. Tellegen, "A general network theorem, with applications," *Philips Res. Rept.*, vol. 7, pp. 259-269, Agosto 1952. `http://www.ieee.org/web/aboutus/history_center/biography/tellegen.html`

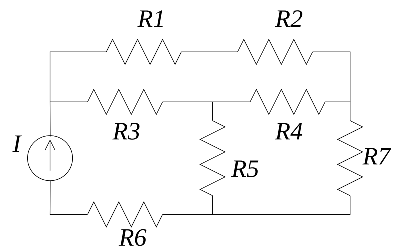


Figura 1.24: Circuito con fuente de corriente independiente

$R_5 = 200\ \Omega$, $R_6 = 250\ \Omega$, $R_7 = 150\ \Omega$. *Ayuda:* recuerde que la corriente en una rama es siempre la misma para todos los elementos de la rama. En el circuito presentado, la corriente que pasa a través de R_6 es igual a la de la fuente, es decir, $i_{R_6} = I = 1.5$ [A] (resultado directo sin calcular), en el mismo sentido indicado por la fuente.

(a) ¿Cuántas ecuaciones obtuvo para la LTK? ¿para la LCK?
(b) Calcule las tensiones y corrientes en cada elemento.
(c) Calcule la potencia de cada elemento.
(d) Verifique el teorema de Tellegen y la conservación de la energía.
(e) Obtenga la matriz de incidencia.

? ✓ 1.4 Plantee los mismos cálculos de la parte anterior para el circuito de la Figura 1.25. La siguiente es una lista de valores comerciales de resistencias de la serie de *tolerancia* 10% (E12): 10 12 15 18 22 27 33 39 47 56 68 82.[15] Tome valores de resistencia de esta entre 100 Ω y 9999 Ω para los resistores R_1 al R_7. Incluya el valor del error o *tolerancia* en sus cálculos. Por ejemplo, si toma un resistor de $150\ \Omega \pm 10\%$, esto indica que el valor real de la resistencia está entre $[135\ \Omega, 165\ \Omega]$. ¿Cómo podría hacer sus cálculos tomando en cuenta la tolerancia? *Ayuda:* recuerde el cálculo de errores de sus cursos de Física y Cálculo.

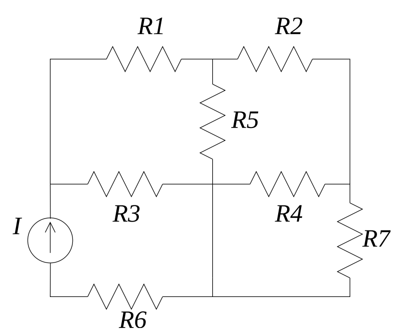


Figura 1.25: Circuito con fuente de corriente independiente

? 1.5 Considere el circuito de la Figura 1.26a, el cual presenta tres fuentes de tensión

[15]En este tipo de series — serie E del estándar internacional IEC 60063 — sólo se muestran los dos primeros dígitos, los demás se obtienen por múltiplos de base 10, p.e. 390 Ω, 4.7 kΩ, 15 kΩ son resistencias que pertenecen a la serie E12.

en serie. Obtenga la tensión v. En la Figura 1.26b se muestran tres fuentes de corriente *en paralelo*, calcule la corriente i. Adicionalente, ¿puede calcular la corriente i_1? ¿cuál es su valor? Este ejercicio muestra que los valores de las fuentes de tensión conectadas en serie (resp. fuentes de corriente conectadas en paralelo) se suman.

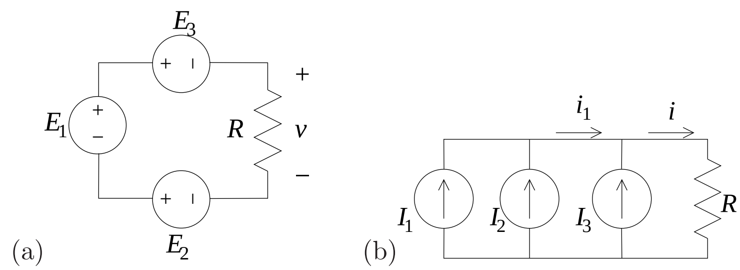


Figura 1.26: Circuitos del Ejercicio 5, con fuentes en serie y en paralelo

✓ **1.6** ¿Puede conectar dos fuentes de tensión en paralelo? ¿Puede conectar dos fuentes de corriente en serie? Explique. *Ayuda:* para responder estas últimas dos preguntas, aplique las leyes de Kirchhoff que correspondan (¿qué pasa si conecta una fuente de tensión en paralelo con un corto?).

✓ **1.7** En la Figura 1.27 se presenta un circuito con dos resistores conectados en serie. Calcule las tensiones v_1 y v_2. ¿Encuentra algún parecido entre las dos soluciones? Añada un resistor R_3 también en serie. Calcule las tensiones de cada resistor, v_1, v_2 y v_3. ¿Podría generalizar el resultado para n resistores conectados en serie? A esta configuración (donde existe una tensión entre los terminales de una conexión en serie de resistores) se le conoce con el nombre de *divisor de tensión* o *divisor de voltaje*.

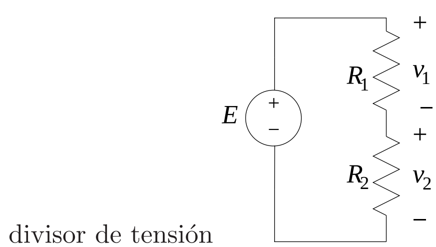


Figura 1.27: Circuito del Ejercicio 7

✓ **1.8** Considere el circuito de la Figura 1.28, el cual presenta tres resistores conectados en paralelo. Calcule las corrientes i_1, i_2 e i_3. ¿Existe alguna relación entre los tres resultados? *Sugerencia:* en lugar de usar las resistencias asociadas, haga los cálculos con las correspondientes conductancias, es decir, $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$ y $G_3 = 1/R_3$. Compare con el resultado del ejercicio anterior. A esta configuración, en la cual una corriente se "divide" a llegar a dos o más vías diferentes (dos o más resistores en paralelo), se le llama *divisor de corriente*. El divisor de corriente es el *dual* del dividor de tensión. Generalice el resultado obtenido para n resistores conectados en paralelo.

divisor de corriente

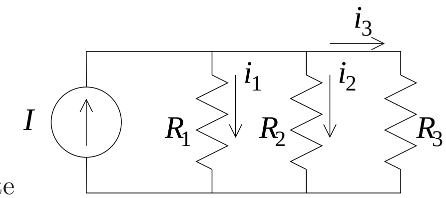


Figura 1.28: Circuito del Ejercicio 8

Observación: en la Figura 1.29 se representan los divisores de tensión y de corriente de una manera ligeramente diferente. Esto es para indicar que la fórmula del divisor de tensión (resp. divisor de corriente) es válida para cualquier tensión entre los terminales de la configuración en serie (resp. cualquier corriente entrando a la configuración en paralelo). Aquí se puede apreciar perfectamente de donde vienen las propiedades de un divisor de tensión: la corriente i_0 es la misma en todos los elementos en serie, es decir, es la misma en toda la rama. En el caso del divisor de corriente, la tensión v_0 es la misma en todos los elementos en paralelo, es decir, la tensión entre el nodo a y b (nodo de referencia) es igual para todos los elementos.

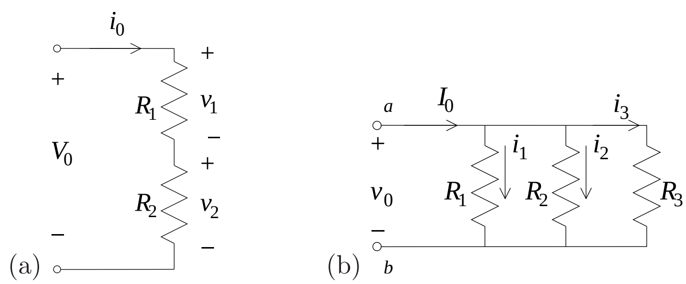


Figura 1.29: (a) Divisor de tensión. (b) Divisor de corriente

Verifique que el divisor de tensión en la Figura 1.29a está dado por:

$$v_j = \frac{R_j}{\sum_{k=1}^{n} R_k} V_0 \ , \qquad j = 1, \ldots, n \tag{1.17}$$

con $n = 2$.

Verifique que el divisor de corriente en la Figura 1.29b está dado por:

$$i_j = \frac{G_j}{\sum_{k=1}^{n} G_k} I_0 = \frac{\frac{1}{R_j}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} I_0 \ , \qquad j = 1, \ldots, n \tag{1.18}$$

con $n = 3$.

✓ **1.9** El sistema de ecuaciones (1.12) posee seis ecuaciones y seis incógnitas. Este sistema se puede reducir a tres ecuaciones con tres incógnitas de la manera siguiente: de las tres últimas ecuaciones puede despejar tres incógnitas (p.e. i_4, i_5, i_6) y dejarlas en función de las tres restantes (resp. i_1, i_2, i_3).

En este ejercicio, despeje de las ecuaciones (1.6)–(1.8) las corrientes i_2, i_3 e i_4 (internas) en función de las corrientes i_1, i_5, i_6 y sustitúyalas en las tres primeras ecuaciones de (1.12). El sistema de ecuaciones resultante representa las ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de las mallas.

? ✓ **1.10** Suponga que desea medir la corriente i_2 en el circuito de la Figura 1.12. Para ello, coloca el amperímetro en paralelo entre los nodos c y d. Esto corresponde a conectar un corto entre los nodos c y d. Rehaga los cálculos con un corto en paralelo a la resistencia R_3. Compare con los valores obtenidos, ¿cambiaron los resultados?, ¿cuál es la corriente y la tensión obtenidas en R_3? Ahora, *reemplace* el resistor R_3 por un corto. ¿Cuál es ahora la tensión de la rama, $v_{ab} = v_a - v_b$? ¿Cuál es la corriente de la rama donde está el corto?

1.11 Construya la matriz de incidencia del circuito de la Figura 1.16, incluyendo los nodos a y f. Haga el grafo dirigido y verifique el teorema de Tellegen usando los resultados de la Tabla 1.1.

1.12 Construya la matriz de incidencia del circuito de la Figura 1.20. Obtenga el grafo dirigido. Verifique el teorema de Tellegen usando los resultados obtenidos.

Complemento. Un sensor táctil*

Este es un ejemplo incompleto. La idea es ir agregando aplicaciones de diferentes áreas. Muchas de ellas fueron realizadas durante el trabajo en clase.

Sirve para medir la distribución de presión 2-D. La malla de resistencias de medición se parece al sistema empleado por los juegos de computadoras para enviar comandos. La medición se basa en un material elástico que cambia su resistencia, medida entre dos electrodos. Véase Robotics Research, Vol. 1, No. 3, 3-18,1982 (tomado del curso *Robotics* de H. Asada en el MIT). El diagrama de medición con un ampliop/comparador asemeja el empleado para una galga.

A medida que se presiona la malla en algún punto, la resistencia en ese punto disminuye desde infinito a un valor pequeño (funciona como un suiche conectado con una resistencia). ¿Qué algoritmo debería emplearse para determinar cuánto y en que posición se está haciendo presión?

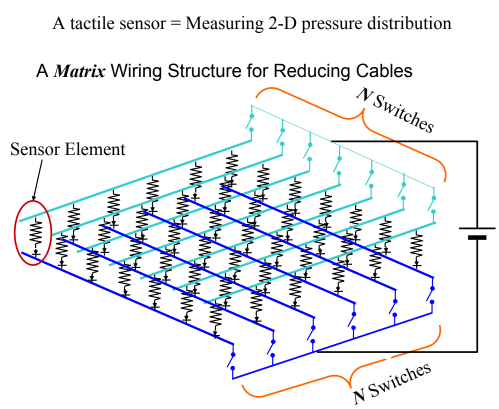


Figura 1.30: Sensor táctil, Asada 2004

Capítulo Dos

Algunos elementos en detalle

Contenido: Fuentes independientes: ideales y no ideales, fuentes dependientes, ampliops, circuitos en cascada.

I Fuentes independientes y fuentes controladas

En la sección anterior se estudiaron dos tipos de fuentes independientes (ff.ii.): la f.i. de tensión y la f.i. de corriente. En esta parte, clasificaremos primeramente las fuentes en *ideales* y *no ideales*.

Fuentes independientes

Fuentes ideales. Las ff.ii. son llamadas *ideales* cuando pueden entregar toda la energía que poducen sin pérdidas internas. Esto no es posible en la realidad. Las curvas características de las ff.ii. son líneas rectas en el valor constante porporcionado por la fuente. Los modelos asociados correponden a:

- una constante $v_f(t) = E$ ó $i_f(t) = I$,
- una función escalón $v_f(t) = E\mathcal{H}(t - t_0)$ ó $i_f(t) = I\mathcal{H}(t - t_0)$

Este es el modelo más simple de una fuente.

Fuentes no ideales. Considere la Figura 2.1. Se muestra una primera aproximación a las *fuentes reales*, tanto de tensión como de corriente. Observe que la fuente de tensión (Figura 2.1a) se transforma en ideal si $r_i \equiv 0$ (corto). De la misma forma, la fuente de corriente (Figura 2.1b) se transforma en ideal si $R_i = \infty$ es un *circuito abierto* ó, simplemente, un *abierto* (más propiamente deberíamos indicar que $R_i \to \infty$ es un "muy" grande).

¿Cómo se obtiene la relación de tensión vs corriente entregada en estas ff.ii. no ideales?

Vamos a estudiar la fuente de tensión (Figura 2.1a). Si $I = 0$ [A] es claro que $v_f(t) = V$ [V].

Si la corriente aumenta $I > 0$, la tensión resulta $v_f(t) = V - r_iI$. Véase la Figura 2.2a. Esta expresión viene de aplicar la LTK a la malla ficticia ilustrada en la figura:

$$-V + r_iI + v_f(t) = 0$$

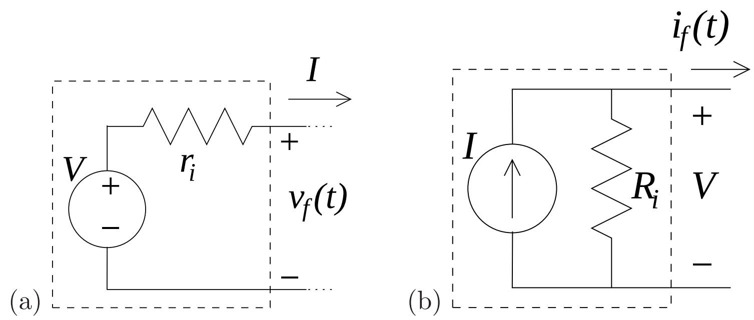


Figura 2.1: Fuente independiente no ideal: (a) de tensión, (b) de corriente

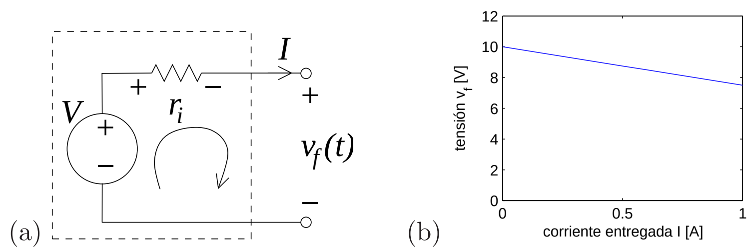


Figura 2.2: (a) F.i. no ideal de tensión, (b) curva tensión-corriente entregada

lo que resulta en:

$$v_f(t) = V - r_i I \tag{2.1}$$

donde $v_f(t)$ varía en función I. Los parámetros V y r_i son constantes, r_i corresponde a una resistencia interna de la fuente (tiene valores pequeños, generamente $r_i \ll 10\ \Omega$). Observe, además, que este modelo aún constituye una *aproximación lineal* de la realidad.

En la Figura 2.2b, se muestra la relación de tensión vs corriente entregada para los valores $V = 10$ [V] y $r_i = 2.5\ \Omega$. Es importante notar, por ejemplo, que para $I = 1$ [A], la tensión observada $v_f(t)$ en los extremos de la fuente es $v_f(t) = 7.5$ [V], en lugar de 10 [V]. Este fenómeno es común en la práctica: uno ve que la fuente "se cae", lo cual es precisamente causado por la pérdidas internas, las cuales están siendo modeladas en este caso a través de r_i. Véase el Ejemplo I.1.

Observe que si la corriente "entra" (va en sentido contrario al indicado), $I < 0$, la fuente generaría una tensión mayor a la nominal (además de consumir energía como un elemento pasivo).

El modelo (2.1) permite representar simultáneamente varios casos:

- Caso $r_i = 0\ \Omega$. Fuente ideal
- Caso $V = 0$ [V]. Representa la ley de Ohm, $v_{r_i} = -v_f = r_i I$ (observe que la tensión en el resistor está medida al revés)
- Caso $r_i = 0\ \Omega$, $V = 0$ [V]. Corto circuito, $v_f = 0$ [V] (recuerde que la tensión entre los terminales de un corto siempre es 0)

Le queda al lector, como ejercicio, el estudio de la curva característica de la fuente no ideal de corriente.

Comentario: los componentes que hemos estudiado hasta ahora (resistor, fuente independiente — véase, p.e., la Figura 2.2a) son llamados de *1-Puerto*. En la Figura 2.3a se muestra un componente que se asume es pasivo. De aquí viene precisamente el interés de estudiar la característica v-i (ó la i-v) de un componente electrónico. Es una excelente manera de representar incluso un circuito dado. En muchos casos, está curva característica es suficiente para entender el comportamiento del circuito (a pesar de tener muchos componentes) y, así, poder interconectarlo con otros circuitos.

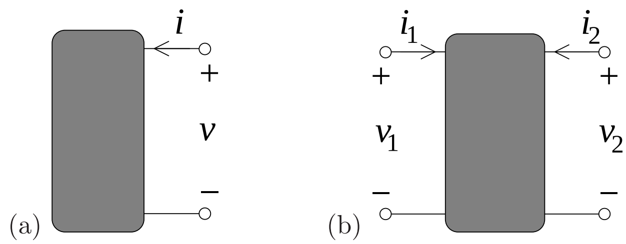


Figura 2.3: Componentes de (a) 1-Puerto (2-Terminales) y (b) 2-Puertos

La llamada *curva característica* v-i de un componente de 1-Puerto, p.e. de la fuente anterior, se obtiene mirando la relación de la tensión del puerto y corriente del puerto, como se muestra en la Figura 2.4. Observe que la curva mostrada en la Figura 2.4b es la misma anterior (Figura 2.2b) pero con el eje de las abcisas invertido (la corriente $I = -i$).

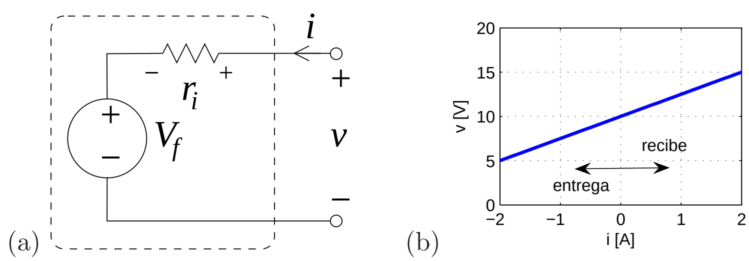


Figura 2.4: (a) Fuente de tensión vista como un componente de 1-Puerto, (b) curva característica v-i (se especifica el modo de operación de la fuente)

A continuación comenzaremos a estudiar algunos elementos que poseen no uno sino dos o más puertos. En la Figura 2.3b se muestra un componente (que puede ser incluso no lineal) de *2-Puertos*.

1 Ejemplo (Cómo medir la resistencia interna de una fuente) Un método para tener una estimación del valor de la resistencia interna de una fuente, sin medirla directamente se muestra en la Figura 2.5.

Observación: el multímetro se modela como una resistencia infinita (un circuito abierto). Por lo tanto, $i = 0$ [A]. Cuando esto ocurre el valor medido en el multímetro es $v = v_1 = V_f$ (no hay caidas de tensión en r_i).

Cuando se conecta una carga R_c y se mide la tensión $v = v_2$, se deducen dos cantidades:

Paso 1

Paso 2

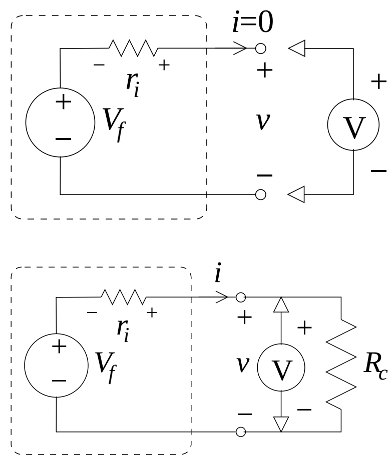


Figura 2.5: 1) Se mide la tensión en los extremos de la fuente, 2) se conecta una resistencia conocida a la fuente y se mide de nuevo

- la corriente i:

$$i_e = \frac{v}{R_c} = \frac{v_2}{R_c} \tag{2.2}$$

- la diferencia de potencial en los extremos de R_i:

$$v_e = V_f - v = v_1 - v_2 \tag{2.3}$$

La resistencia interna r_i se obtiene de (2.2) y (2.3), al aplicar la ley de Ohm,

$$r_i \approx \frac{v_e}{i_e} = \frac{(v_1 - v_2)R_c}{v_2}$$

Se puede observar que para estimar r_i se necesitan las dos mediciones v_1 y v_2 y se necesita conocer el valor de R_c.

Fuentes controladas

Un tipo particular de fuente que usaremos muy seguido en estas notas es el de las fuentes controladas. Una *fuente controlada*, también llamada *fuente dependiente*, es aquella cuyo valor *depende* (es controlado) de otra variable medida (tensión ó corriente) dentro del circuito. Como veremos, las fuentes dependientes se representan mediante una rombo y dentro el símbolo que corresponda al tipo de fuente ($\pm$ si es de tensión o una flecha en el caso de una fuente de corriente). Existen varios tipos de fuentes:

- Fuentes de tensión controlada:
  - FTCT (*Fuente de Tensión Controlada por Tensión*[1])
  - FTCC (*Fuente de Tensión Controlada por Corriente*[2])
- Fuentes de corriente controlada:

[1] En inglés, *voltage-controlled voltage source* (VCVS).
[2] En inglés, *current-controlled voltage source* (CCVS).

– FCCT (*Fuente de Corriente Controlada por Tensión*[3])
– FCCC (*Fuente de Corriente Controlada por Corriente*[4])

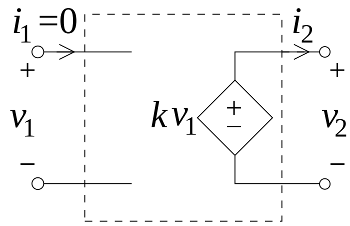


Figura 2.6: FTCT. Red de 2-Puertos

Vamos a analizar la primera de ellas. En la Figura 2.6 se muestra una FTCT, el símbolo ± dentro del rombo indica la *polaridad* (sentido de referencia de la tensión donde están ubicados los "polos" '+' y '-'). A diferencia de los elementos que hemos visto hasta ahora posee 2 puertos. Uno de entrada (indicado por v_1 e i_1) y otro de salida (indicado por v_2 e i_2). Observe que la corriente i_2 ha sido escogida asumiendo que la fuente de tensión *entrega*. La tensión v_2 en el puerto de salida depende de la tensión v_1 en el puerto de entrada:

$$v_2 = kv_1$$

donde k es una constante (considerada sin unidades ó [V]/[V]) que puede ser positiva o negativa. La corriente i_1 está dada por $i_1 = 0$ [A].

PREGUNTA. ¿Cuál es la resistencia vista desde los terminales de v_1? *Respuesta:* la corriente $i_1 = 0$ [A], por lo tanto, $R_{eq} = \infty$, como se puede apreciar es un abierto.

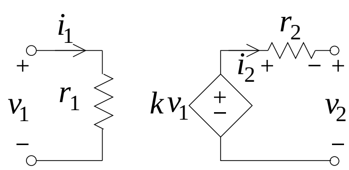


Figura 2.7: FTCT no ideal

Más generalmente, una FTCT se puede modelar como la red de 2-Puertos de la Figura 2.7. A este modelo circuital de 2-Puertos también se le llama *amplificador de tensión* (*voltage amplifier* en inglés). A k se le conoce con el nombre de *ganancia de tensión en lazo abierto* (como ya dijimos, en este caso, se puede expresar sin unidades o con unidades de [V]/[V]). Tenemos una resistencia de entrada $r_1 < \infty$, de forma tal que

$$v_1 = r_1 i_1$$
$$v_2 = kv_1 - r_2 i_2$$

[3]En inglés, *voltage-controlled current source* (VCCS).
[4]En inglés, *current-controlled current source* (CCCS).

Estos dos primeros modelos los vamos a emplear más adelante, cuando estudiemos los *ampliops*. Véase la Sección II.

Sustituyendo $v_1 = r_1 i_1$ en la segunda ecuación y acomodando los términos, esta red se puede escribir en forma matricial $\vec{v} = M\vec{i}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ kr_1 & -r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Observe que todos los coeficientes $M_{i,j}$ de la matriz M tienen entonces unidades de resistencia ([Ω]).

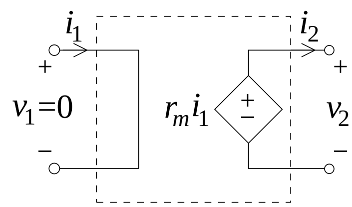


Figura 2.8: FTCC. Red de 2-Puertos

Una FTCC se muestra en la Figura 2.8. En este caso, la resistencia R vista desde v_1 es $R = 0\ \Omega$. A la constante r_m, con unidades en [Ω], se le llama *resistencia de transferencia* (*transfer resistance* en inglés). En este caso, $v_2 = r_m i_1$ ($v_1 = 0$ [V]). En la Figura 2.9 se muestran fuentes de corrientes controladas, resp., por corriente, FCCC ($i_2 = ki_1$, $v_1 = 0$ [V]), y tensión, FCCT ($i_2 = g_m v_1$, $i_1 = 0$ [A]). En esta última, la constante g_m tiene unidades de [S] = [A]/[V]. Por esta razón, a g_m se le llama *conductancia de transferencia* ó *transconductancia*[5].

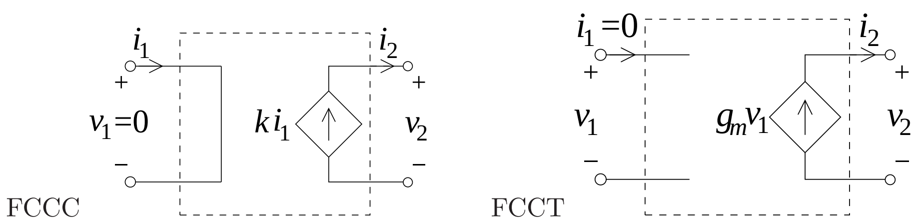


Figura 2.9: Fuentes de corriente controladas

2 Ejemplo En la Figura 2.10 se muestra un circuito donde se presenta una FTCT, la cual depende de v_1. Observe que no sólo se indica dónde se mide v_1, además se indica cómo, es decir, debe estar indicado de manera precisa el lugar y el sentido de la tensión v_1.

Obtengamos las ecuaciones que modelan este circuito a partir de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchhoff, asumiendo los sentidos indicados en la Figura 2.11.

Variables desconocidas: (seis) v, V_x, v_1, i_1, i_2, i_3

Valores conocidos: R_1, R_2, $k > 0$, I

[5]El uso de estos nombres se hará evidente cuando estudiemos a los transistores.

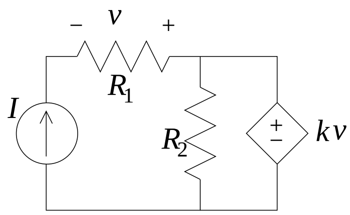


Figura 2.10: Circuito con FTCT

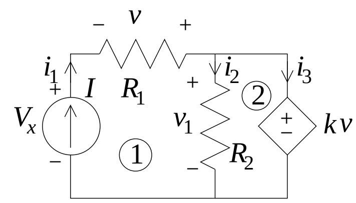


Figura 2.11: Circuito con FTCT: aplicación de las leyes de Kirchhoff

Ley de Ohm:

$$v = -R_1 i_1 \tag{2.5}$$

el signo '-' viene del sentido de la corriente i_1.

$$v_1 = R_2 i_2 \tag{2.6}$$

LCK:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{2.7}$$

En particular, se tiene $i_1 = I$ (la corriente de la rama, van en el mismo sentido). Esto hace que tengamos cinco variables por determinar.

LTK:

$$\begin{aligned} -V_x - v + v_1 &= 0 \\ -v_1 + kv &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En resumen, disponemos de cinco ecuaciones (2.5)–(2.8) con cinco incógnitas, v, V_x, v_1, i_2, i_3. La solución está dada por:

$$i_1 = I\ , \quad i_2 = -k\frac{R_1}{R_2}I\ , \quad v = -R_1 I$$
$$V_x = R_1 I - kR_1 I\ , \quad i_3 = \frac{R_2 + kR_1}{R_2} I$$

y

$$v_1 = kv = -R_1 k I$$

(**verifíque esta solución!**)

Ganancia: si consideramos a v_1 como la *salida medida* del circuito e I como la *entrada*, entonces el valor $\mathcal{G} = -R_1 k$ la relación

$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{v_1}{I} = -R_1 k = \mathcal{G}$$

es la *ganancia*.

Resistencia equivalente: supongamos que se desea determinar cuál es la *resistencia asociada* a un elemento o conjunto de elementos del circuito estudiado, por ejemplo, la resistencia entre los terminales a y b mostrados en la Figura 2.12a. Para precisar este problema, observe la Figura 2.12b donde se ha reemplazado el conjunto de elementos de la derecha por una sola resistencia R_{eq} que corresponda al *comportamiento tensión-corriente* de ese conjuntos de elementos. De esta forma, lo que se quiere es determinar la *resistencia equivalente* R_{eq} vista desde la fuente ó *resistencia equivalente vista "hacia la derecha" de los terminales a y b*.

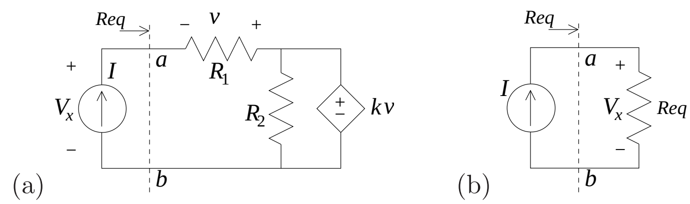


Figura 2.12: Resistencia equivalente vista desde la fuente

Por la definición de resistencia (ley de Ohm), la R_{eq} está dada por

$$R_{eq} = \frac{V_x}{I} = \frac{R_1 I - k R_1 I}{I} = (1-k)R_1$$

de forma tal que $R_{eq} = (1-k)R_1 > 0$ solamente para el intervalo $0 < k < 1$. Si $k > 1$, se tiene $R_{eq} < 0$, es decir, la resistencia equivalente en este caso puede ser incluso negativa[6], algo que no puede pasar físicamente con un resistor lineal. Esta propiedad ($R_{eq} < 0$) es posible gracias a la fuente dependiente.

3 Ejemplo (Amplificador de tensión) En la Figura 2.13 se muestra un circuito con una fuente v_f con resistencia interna R_f, un amplificador de tensión (véase la Figura 2.7) y una *carga*[7] (*load* en inglés). La constante A es la ganancia de tensión en lazo abierto.

Observación: en muchos casos dos de los terminales de la red de 2-Puertos (interior del rectángulo) están referidos al mismo nodo tierra.

Pregunta. ¿Cuál es la *relación de amplificación* o ganancia $\frac{v_o}{v_f}$ para este circuito?

Podemos emplear la fórmula del divisor de voltage (véase el Ejercicio 7 en la sección anterior y la ecuación (1.17)) para calcular las tensiones v_i y v_o:

$$v_i = \frac{R_i}{R_f + R_i} v_f \ , \qquad v_o = \frac{R_c}{R_c + R_o} A v_i$$

De donde resulta

$$v_o = \frac{R_c}{R_c + R_o} A \frac{R_i}{R_f + R_i} v_f$$

[6]Una *resistencia negativa* funcionaría físicamente como una fuente. Es interesante indicar que si la red de componentes, donde se quiere determinar la equivalencia, está formada solamente por resistores, entonces la resistencia equivalente *siempre es positiva*. Véase la Sección I.

[7]La *carga* o resistencia de carga sirve para representar (modelar) elementos conectados a un circuito sin precisar exactamente a qué es lo que corresponden físicamente: un motor, un altoparlante, otro circuito, etc. También se le simboliza mediante R_L por *load resistance*.

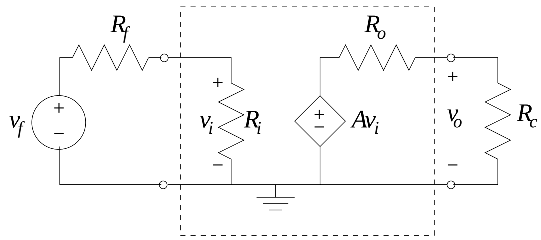


Figura 2.13: Circuito con amplificador de tensión

es decir, la ganancia está dada por

$$\frac{v_o}{v_f} = \frac{AR_cR_i}{(R_c + R_o)(R_f + R_i)}$$

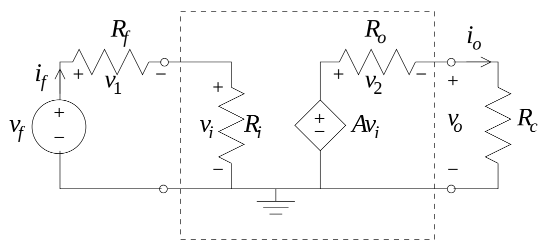


Figura 2.14: Circuito con amplificador de tensión: tensiones y corrientes

Pregunta. ¿Cuál es la ganancia de corriente?
Igual que antes, la ganancia de corriente se define como un cociente, en este caso:

$$\frac{i_o}{i_f} = \frac{\frac{Av_i}{R_o+R_c}}{\frac{v_f}{R_f+R_i}} = \frac{A(R_f + R_i)}{R_o + R_c}\frac{R_i}{R_f + R_i}\frac{v_f}{v_f} = \frac{AR_i}{R_o + R_c}$$

Tips–lab: la ventaja de emplear el circuito de la Figura 2.13, en lugar de conectar la fuente directamente a la carga (véase la Figura 2.15), es cuando la resistencia de la fuente R_f es más grande que la resistencia de carga R_c. En este caso la ganancia

$$\frac{v_o}{v_f} = \frac{R_c}{R_f + R_c} \ll 1$$

es muy pequeña, es decir, una *atenuación* significativa.

Sería preferible que se tuviera un amplificador (encerrado por un rectángulo en la Figura 2.13) con una alta resistencia de entrada $R_i \gg R_f$ y una baja resistencia de salida $R_o \ll R_c$, aunque la ganancia $\frac{v_o}{v_f}$ sea pequeña o incluso unitaria. Esto permite en cierta forma *aislar* los efectos de la resistencia de salida sobre la fuente de tensión a la entrada. A este tipo de amplificadores se les llama *búfer* (*buffer amplifier* en inglés).

Pregunta. ¿Cuál es la corriente que pasa desde la parte izquierda a la parte derecha del circuito? Observe el circuito de la Figura 2.16. Aplicando la definición de

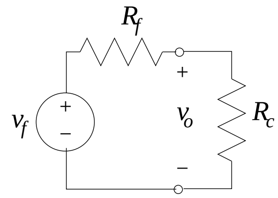


Figura 2.15: Fuente de tensión real con carga R_c

supernodo, encerramos[8] por ejemplo la parte a la derecha, entonces nos conseguimos con que existe una sola rama que entra y ninguna que sale. Al aplicar la LCK al supernodo, se obtiene $i = 0$ [A]. El resultado es el mismo si se aplica la LCK al nodo a o al nodo b. Es por ello que en los cálculos se asume que los dos circuitos, desde el punto de vista de las corrientes, son independientes. Por el contrario, todas las tensiones están referidas a un sólo nodo (tierra).

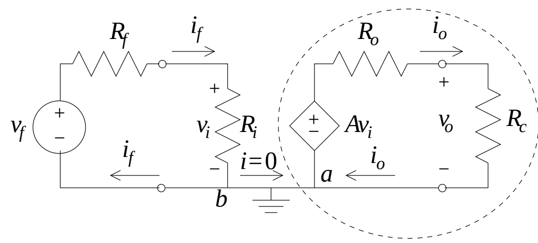


Figura 2.16: Corriente entre dos circuitos conectados a un nodo común. Se muestra la superficie gaussiana (curva cerrada punteada)

4 Ejemplo (Transistor BJT) El *transistor* es uno de los dispositivos electrónicos de 3-Terminales más comúnmente usados. En la Figura 2.17 se muestra un *transistor de unión bipolar* o tipo BJT (por sus siglas en inglés, *bipolar junction transistor*). Los tres terminales se llaman *emisor* (E), *base* (B), *colector* (C). En cada terminal se indica una corriente i_E, i_B e i_C, generalmente en las direcciones que se muestran, y dos tensiones v_{BE} y v_{CE}. Véase la Figura 2.17a. A la configuración mostrada se le llama configuración en modo *emisor común*: las corrientes i_B e i_C de los puertos se pueden escribir en términos de las tensiones de los puertos v_{BE} y v_{CE}, referidas al nodo común E.

Las relaciones entre las corrientes y tensiones de los terminales son eminentemente no lineales. De hecho, el transistor BJT puede ser visto como un *resistor no lineal de 3-Terminales controlado por corriente*. Vamos a poder estudiar este dispositivo mediante una aproximación lineal. Si se estudia el compportamiento del BJT para *pequeña señal*[9] (a baja frecuencia), es decir, "muy cerca de su punto de operación"[10],

[8] A la curva cerrada que nos permite encerrar uno o varios nodos y los elementos conectados entre ellos se le llama *curva* o *superficie gaussiana*.

[9] En inglés, *small signal model*.

[10] Vamos a precisar este concepto más tarde. Por ahora, nos contentaremos con saber/aceptar que el modelo lineal es *equivalente* al modelo del BJT (es decir, el compor-

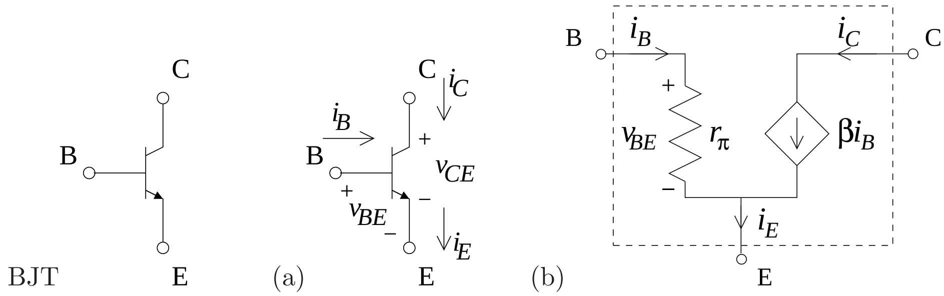


Figura 2.17: Transistor de unión bipolar (BJT): símbolo circuital, en (a) se indican las tensiones y corrientes. (b) Modelo equivalente, representación mediante un amplificador de corriente

el comportamiento del BJT se puede representar mediante el *amplificador de corriente* mostrado en la Figura 2.17b. En la Figura 2.18 se puede apreciar una FCCC y el amplificador de corriente con nodo común E.

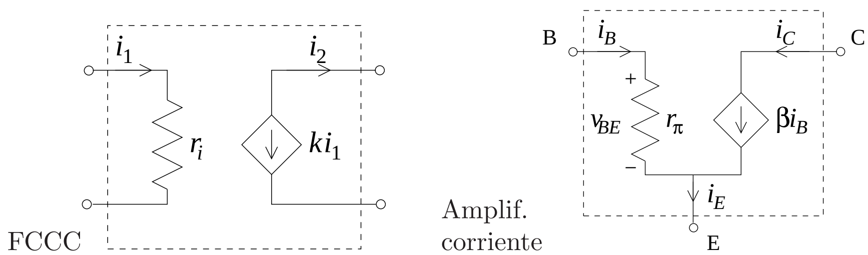


Figura 2.18: Comparación entre una FCCC y un amplificador de corriente representando un BJT. Observe el nodo común en el caso del amplificador de corriente

Considere el circuito mostrado en la Figura 2.19a. La fuente de tensión V_f tiene una resistencia en paralelo de 1 kΩ. La resistencia de carga $R_c = 1$ kΩ. Preguntas. ¿Cuál es la ganancia de tensión v_o/V_f? ¿Cuál es la ganancia de corriente i_o/i_f? En este caso, tomamos $r_\pi = 2$ kΩ y $\beta = 90$.

Respuesta: Al reemplazar el transistor BJT por el modelo de amplificador de corriente se obtiene el circuito mostrado en la Figura 2.19b. La corriente i_B está dada por (observe que el nodo E y tierra corresponden a un sólo nodo):

$$i_B = \frac{v_f}{R_f + r_\pi}$$

Se obtiene $v_o = -R_c i_C$ sabiendo que $i_C = \beta i_B$:

$$v_o = -R_c i_C = -R_c \beta i_B = -\frac{R_c \beta}{R_f + r_\pi} v_f$$

tamiento del amplificador de corriente es *similar* al comportamiento del BJT en la región de operación estudiada).

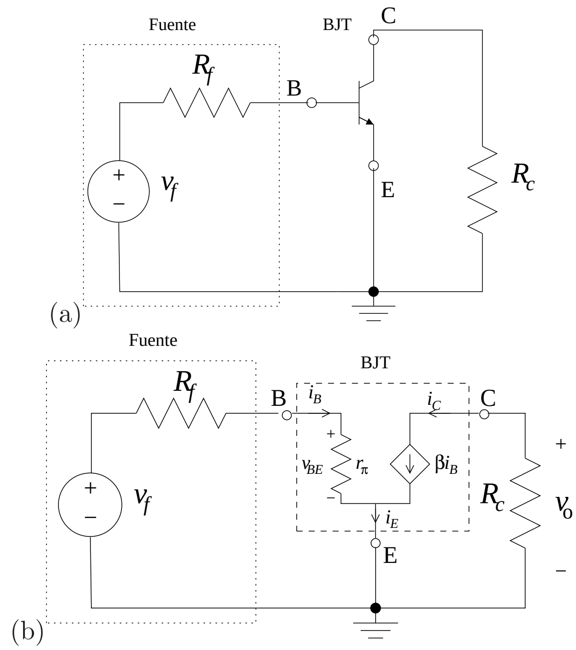


Figura 2.19: (a) Circuito con transistor BJT, (b) al reemplazar el BJT por su modelo lineal de baja señal (modo emisor común)

de forma tal que la ganancia de tensión es:

$$A_v = \frac{v_o}{v_f} = -\frac{R_c\beta}{R_f + r_\pi}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior:

$$A_v = \frac{v_o}{v_f} = -\frac{1\ \text{k}\Omega \times 90}{3\ \text{k}\Omega} = -30\ \frac{[\text{V}]}{[\text{V}]}$$

Este valor también se puede expresar en *decibeles* o [dB]. Esta unidad es muy utilizada en circuitos eléctricos, sobre todo en el caso de amplificadores. Es una medida logarítmica de las ganancias. En este caso, la ganancia de tensión A_v queda

$$|A_v|_{\text{dB}} = 20 \log |A_v| = 29.54\ \text{dB}$$

La ganancia de corriente viene directamente de la expresión $i_C = \beta i_B$, es decir,

$$A_i = \frac{i_o}{i_f} = \frac{-i_C}{i_B} = -\frac{\beta i_B}{i_B} = -\beta = -90\ \frac{[\text{A}]}{[\text{A}]}$$

En decibeles

$$|A_i|_{\text{dB}} = 20 \log |A_i| = 39.08\ \text{dB}$$

Pregunta. ¿Cuál es el valor de i_E? Aplicando la LCK, se tiene $i_E = i_B + i_C$.

Podemos, además, calcular la *ganancia de potencia* dividiendo la potencia de salida $P_o = v_o i_o$ entre la potencia de entrada $P_f = v_f i_f$:

$$A_p = \frac{P_o}{P_f} = \frac{v_o i_o}{v_f i_f} = A_v A_i = \frac{R_c \beta^2}{R_f + r_\pi} = 2700\ \frac{[\mathrm{W}]}{[\mathrm{W}]}$$

Por razones históricas, la *ganancia en decibeles de la potencia* se calcula con un factor de 10:

$$|A_p|_{\mathrm{dB}} = 10 \log A_p$$

Para este caso, $|A_p|_{\mathrm{dB}} = 34.31$ dB.

5 Ejemplo (Amplificador de potencia) Un amplificador de potencia (*power amplifier* en inglés) se muestra en la Figura 2.20 (observe que se usa una fuente controlada, FCCC). Determine la tensión de salida v_o en función de v_i. Asuma que las resistencias y la ganancia β son conocidas.

Preguntas. ¿Cuál es la resistencia de entrada R_{in} entre los terminales B y tierra? ¿Cuál es ganancia de potencia p_o/p_i?

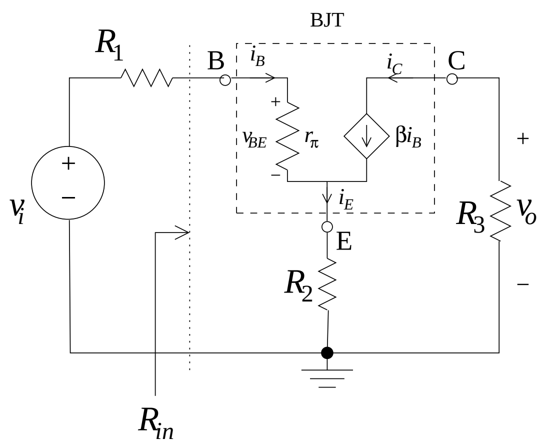


Figura 2.20: Un amplificador de potencia usando una FCCC

Respuesta: de la LCK aplicada al nodo E se obtiene $i_E = i_B + i_C = i_B + \beta i_B = (1+\beta) i_B$. De esta forma,

$$\begin{aligned} v_i &= (R_1 + r_\pi) i_B + i_E R_2 = (R_1 + r_\pi + (1+\beta) R_2) i_B \\ v_o &= R_3(-i_C) = -R_3 \beta i_B \end{aligned} \tag{2.9}$$

(**aplique la LTK**)

De (2.9) se obtiene la tensión de salida

$$v_o = -\frac{R_3 \beta}{R_1 + r_\pi + (1+\beta) R_2} v_i$$

Para calcular R_{in} se obtiene la tensión en el nodo B respecto a tierra:

$$v_B = (r_\pi + (1+\beta) R_2) i_B$$

es decir, $R_{in} = r_\pi + (1+\beta)R_2$.

La potencia entregada por la fuente v_i al circuito es

$$p_i = v_i i_B = (R_1 + r_\pi) i_B + i_E R_2 = (R_1 + r_\pi + (1+\beta)R_2) i_B^2$$

Véase (2.9).

La potencia *entregada por el circuito* a la carga R_o es

$$p_o = v_o(-i_C) = R_3(\beta i_B)^2 = R_3 \beta^2 i_B^2$$

Observación (el signo de la potencia de salida): el circuito completo se ha tomado aquí como si fuese una fuente que le entrega potencia a la carga (que es lo que en realidad ocurre), de aquí el porqué de los signos.

Por lo tanto, la ganancia de potencia resulta:

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{R_3 \beta^2}{R_1 + r_\pi + (1+\beta)R_2}$$

En el caso de que $(1+\beta)R_2 \gg R_1 + r_\pi$ se tiene

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{\beta^2}{(1+\beta)} \frac{R_3}{R_2}$$

Es decir, escogiendo apropiadamente los valores de R_2 y R_3 se puede obtener cualquier ganancia (de potencia) deseada para cualquier valor dado de β.

II Amplificadores operacionales (ampliops)

En esta sección vamos a estudiar uno de los componentes electrónicos más versátiles, y uno de los más baratos, que se encuentran en el mercado: los *amplificadores operacionales*, *ampliops* o *opamps* (por su nombre en inglés, *operational amplifier*).

Algunas de las aplicaciones de los ampliops son: amplificación/atenuación de una señal, filtraje de señal (diseño de filtros activos), aislamiento (*isolation*) de circuitos (usado como búfer), se emplea en la conversión digital-analógica y analógica-digital, en la medición diferencial de señales (p.e. para la eliminación de ruido en la lectura de sensores), en la rectificación de señales y en otras muchas aplicaciones.

A pesar de que un ampliop es un circuito integrado complejo, generalmente compuesto por decenas de transistores y otros elementos, en la práctica, en aplicaciones de baja frecuencia, su comportamiento es prácticamente igual al del modelo ideal que vamos a ver. Esta es la razón por la cual es tan atractivo al momento de hacer montajes.

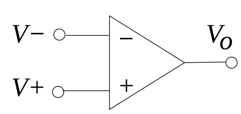


Figura 2.21: Símbolo circuital de un amplificador operacional

El diagrama esquemático asociado a un ampliop se muestra en la Figura 2.21. En términos de una fuente de tensión controlada, una primera aproximación con resistencia de entrada R_i, resistencia de salida R_o y ganancia A se muestra en la Figura 2.22a.

Observe que el error v_1 está dado por $v_1 = V_+ - V_-$. Observe que los nodos V_- y V_+ están referidos a un nodo común (tierra común).

En el *caso ideal*, un ampliop presenta las siguientes características:

- la impedancia (resistencia R_i) de entrada es infinita, $R_i = \infty$
- la impedancia de salida es cero, $R_o = 0$ kΩ
- la ganancia A del amplificador es infinita, $A = \infty$

El modelo ideal de ganancia finita de un ampliop se obtiene al hacer $R_i \to \infty$ y $R_o \to 0$. Véase la Figura 2.22b. La tensión de salida resulta entonces:

$$V_o = -A(V_+ - V_-) = A(V_- - V_+) \tag{2.10}$$

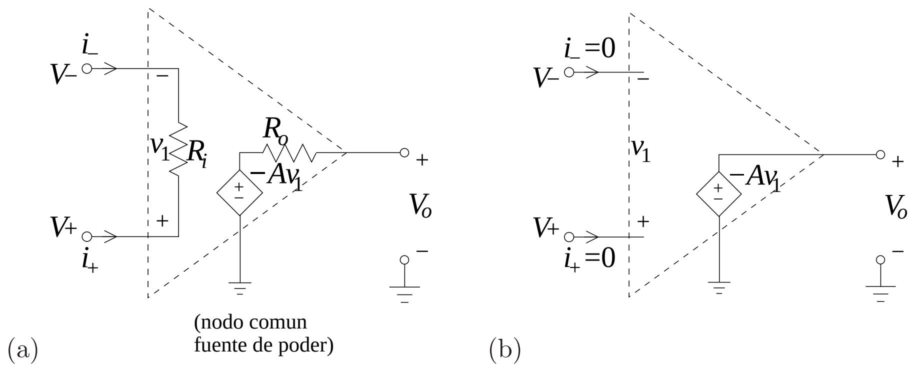


Figura 2.22: Amplificador operacional: (a) modelo lineal completo, (b) modelo ideal de ganancia finita

1 Ejemplo (Búfer o seguidor de tensión) Vamos a estudiar el esquema o configuración mostrado en la Figura 2.23, el cual se obtiene al *realimentar negativamente* la salida, es decir, al conectar la salida con la entrada '-' del ampliop. A la configuración de la Figura 2.23a se le llama *seguidor de voltaje* o búfer. Un caso de la aplicación del búfer (alta resistencia de entrada–baja resistencia de salida) ya lo discutimos en el Ejemplo I.3.

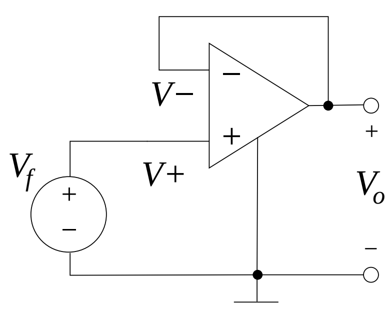


Figura 2.23: Búfer: circuito con amplificador operacional

Vamos de entender cómo se reflejan las características de un ampliop ideal en este circuito realimentado. Para ello, vamos a comenzar por estudiar el comportamiento de los modelos mostrados en la Figura 2.22. Las representaciones del búfer en términos de cada uno de estos modelos se muestran en la Figura 2.24. Observe que hemos garantizado que las conexiones sean las mismas que al incluir el ampliop.

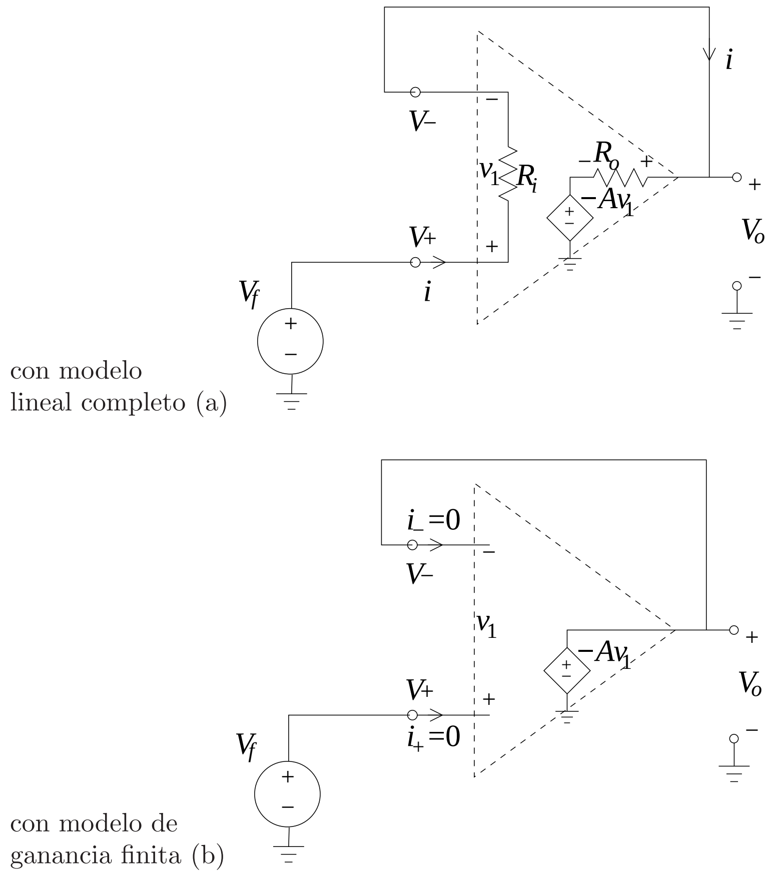


Figura 2.24: Búfer: (a) representación mediante el modelo lineal con FTCT, con $i_+ = i$ e $i_- = -i$ (el nodo tierra es común para V_f, V_o y la fuente controlada $-Av_1$), (b) modelo de ganancia finita

Modelo lineal completo: las siguientes ecuaciones se obtienen al aplicar las leyes de Kirchhoff. Podemos formular básicamente dos mallas:

$$
\begin{aligned}
-V_f + R_i i + R_o i - Av_1 &= 0 \\
Av_1 - R_o i + V_o &= 0 \\
\text{donde} \qquad v_1 &= R_i i
\end{aligned}
$$

con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} i &= \frac{V_f}{R_o + (1-A)R_i} \\ v_1 &= \frac{R_i V_f}{R_o + (1-A)R_i} \end{aligned} \tag{2.11}$$

y

$$V_o = \frac{(R_o - AR_i)V_f}{R_o + (1-A)R_i} \tag{2.12}$$

La ganancia de tensión V_o/V_f está dada entonces por:

$$\frac{V_o}{V_f} = \frac{(R_o - AR_i)}{R_o + (1-A)R_i}$$

(**verifique estos cálculos! esta metodología la va a usar seguramente más adelante**)

Amplificador operacional ideal: a continuación veamos el interés que tiene que se cumplan las condiciones ideales, es decir, resistencia de salida cero, resistencia de entrada infinita y que la ganancia A sea infinita (o "muy grande" como ocurre en la práctica). En condiciones ideales se tiene $R_o = 0\ \Omega$, esto es

$$V_o = \frac{(-AR_i)}{(1-A)R_i} V_f$$

Si hacemos $R_i \to \infty$:[11]

$$V_o = \frac{(-A}{(1-A)} V_f \tag{2.13}$$

Finalmente, al hacer $A \to \infty$ nos queda

$$V_o = V_f \tag{2.14}$$

es decir, el esquema propuesto idealmente tiene ganancia de tensión *unitaria* (la salida es igual a la entrada).

Un poco más formalmente, puede escribirse

$$V_o = \lim_{A\to\infty} \frac{(R_o - AR_i)V_f}{R_o + (1-A)R_i} = \frac{R_i V_f}{R_i} = V_f$$

Preguntas. En condiciones ideales, ¿cuál es la ganancia i/V_f? ¿Cuál es la ganancia v_1/V_f? *Respuesta:* para ambos casos la ganancia es cero. Este resultado está asociado a las suposiciones que haremos a continuación cuando estemos frente a cualquier circuito en presencia de un ampliop ideal.

Modelo lineal de ganancia finita: De la Figura 2.24b se deduce que $V_- = V_o$ y $V_+ = V_f$. Siguiendo (2.10) se obtiene:

$$V_o = A(V_o - V_f) \implies (1-A)V_o = A(-V_f)$$

es decir, el mismo resultado de (2.13):

$$V_o = \frac{-A}{1-A} V_f$$

[11] *Aplicación de Cálculo:* es interesante darse cuenta que, por ejemplo, los conceptos de **límites** vistos en cálculo se aplican aquí directamente.

Haciendo $A \to \infty$ resulta $V_o = V_f$.

Retomemos el circuito de la Figura 2.23. ¿Qué condiciones se pueden aplicar al ampliop realimentado mostrado en la figura de forma tal que se cumplan las condiciones ideales mencionadas? Esto se extrae de (2.11). En condiciones ideales, vamos a asumir que

- (*nodo virtual*[12]) la tensión $v_1 = 0$ [V], es decir, $V_- = V_+$, y
- las corrientes que entran a cualquiera de los terminales son cero, $i_- = i_+ = 0$ [A].

Véase la Figura 2.25. Al aplicar estas dos condiciones resulta direntamente la solución (2.14), $V_o = V_f$, debido a que $V_- = V_o = V_+ = V_f$.

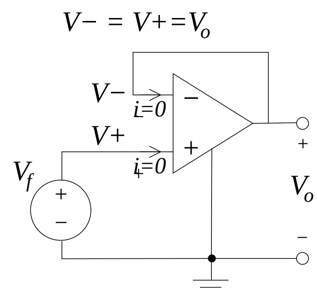


Figura 2.25: Búfer: circuito con amplificador operacional en condiciones ideales

Observación: estas premisas ($V_- = V_+$ y $i_- = i_+ = 0$ [A]) sólo aplican a los casos en que el ampliop está realimentado negativamente.

2 Ejemplo (Amplificador inversor) En la Figura 2.26 se muestra otra configuración realimentada negativamente. En este caso tenemos un *amplificador operacional inversor*. Veamos porque se llama así.

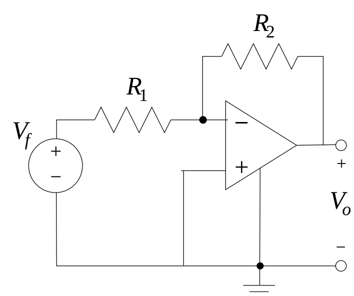


Figura 2.26: Amplificador inversor

En la Figura 2.27 se han aplicado las premisas anteriores para el caso ideal ($V_- = V_+$ y $i_- = i_+ = 0$ [A]). De aquí se desprende que la corriente i_1 es la misma que pasa por R_1 y por R_2, y que la tensión en $V_- = V_+ = 0$ [V] (tensión de tierra). Debido a que $V_- = 0$ [V] se habla entonces de *tierra virtual*.

[12]Se dice que es *virtual* porque en realidad no existe ninguna conexión entre los terminales V_- t V_+ del ampliop.

Se puede hacer, por ejemplo, una malla tal que $-V_f + R_1 i_1 = 0$ o aplicar la ley de Ohm directamente. Este procedimiento resulta en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_f - 0}{R_1} \text{ (Ley de Ohm)} \\ i_1 &= 0 - V_o R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$i_1 = \frac{V_f}{R_1} = \frac{-V_o}{R_2}$$

de donde

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_f \tag{2.15}$$

Observe que hemos hecho estos cálculos sin recurrir a los modelos de fuentes controladas ni a las aproximaciones mediante límites, asumiendo el comportamiento ideal del ampliop.

La ganancia $V_o/V_f = -R_2/R_1 < 0$ (negativa). Es por esta razón que a esta configuración se le llama *amplificador inversor*, porque *invierte* (cambia) el signo de la señal de entrada V_f.

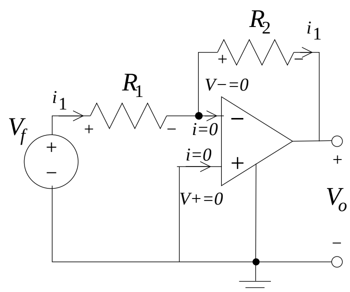


Figura 2.27: Amplificador inversor: análisis

Observación: en los ejemplos anteriores, no hemos conectado ninguna resistencia de carga R_c en la salida V_o. Esta es otra de las buenas propiedades que posee el ampliop en condiciones ideales, la tensión de salida se mantiene *independientemente* del valor de la carga R_c.

Analicemos de nuevo el ejemplo del búfer.

3 Ejemplo (Búfer con carga a la salida) Considere el circuito de la Figura 2.28. Hemos colocado una resistencia de carga R_c a la salida del ampliop, entre el nodo a y tierra. Vamos a analizar este circuito usando el modelo lineal completo visto anteriormente.

Véase la Figura 2.29. Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

$$\begin{aligned} -V_f + R_i i + R_o i_o - A v_1 &= 0 \quad \text{(LTK)} \\ v1 &= R_i i \quad \text{(ley de Ohm)} \\ -(-A v_1) - R_o i_o + R_c i_c &= 0 \quad \text{(LTK)} \\ V_o &= R_c i_c \quad \text{(ley de Ohm)} \\ i - i_o - i_c &= 0 \quad \text{(LCK)} \end{aligned}$$

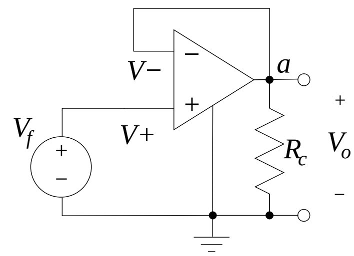


Figura 2.28: Búfer con carga

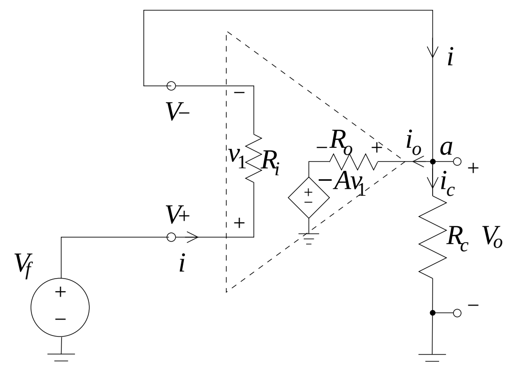


Figura 2.29: Búfer con carga: modelo lineal

Compruebe (**haga los cálculos!**) que se obtienen las siguientes soluciones para la corriente de carga i_c y la tensión de salida V_o:

$$i_c = \frac{R_o - AR_i}{R_oR_i + R_iR_c + R_oR_c - AR_iR_c}V_f$$
$$V_o = \frac{R_c(R_o - AR_i)}{R_oR_i + R_iR_c + R_oR_c - AR_iR_c}V_f$$

Al hacer $A \to \infty$ resulta

$$i_c = \frac{V_f}{R_c}$$
$$V_o = V_f$$

Análisis: bajo condiciones ideales, la tensión de salida $V_o = V_f$ se mantiene, *independientemente* del valor de la resistencia de carga. Además, la corriente i_c resulta en el valor que se obtiene si se aplica directamente la ley de Ohm, tensión/resistencia.

Ejercicios

2.1 Obtenga la relación de corriente versus tensión en la f.i. de corriente no ideal. Dibuje la curva característica.

2.2 Obtenga la relación matricial (al igual que en (2.4)) entre las tensiones y las corrientes de las tres fuentes controladas restantes.

✓ **2.3** Haga los cálculos para el amplificador inversor de la Figura 2.26, usando tanto el modelo ideal completo del ampliop como el modelo de ganancia finita. Compruebe el resultado (2.15). Incluya además una resistencia de carga R_c.

(a) Usando el modelo lineal completo, ¿cuál es la ganancia V_o/V_f?

(b) ¿Cuál es la resistencia equivalente R_{eq} vista desde la fuente? (obtenga los resultados para todos los modelos, incluyendo el ideal)

(c) Obtenga las corrientes i_-, i_1 (asociada a R_1) e i_2 (asociada a R_2).

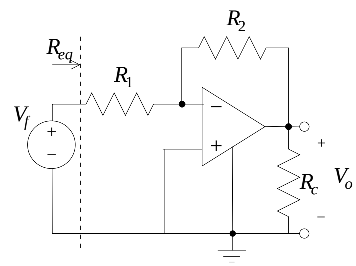


Figura 2.30: Amplificador inversor con resistencia de carga

✓ **2.4** Se desea conectar los dos circuitos mostrados en la Figura 2.31. Considere los tres circuitos mostrados en la Figura 2.32. En el circuito (a) se han conectado los dos circuitos anteriores directamente. En los circuitos (b) y (c) se han empleado dos de los mecanismos vistos hasta ahora para *aislar* ambos circuitos.

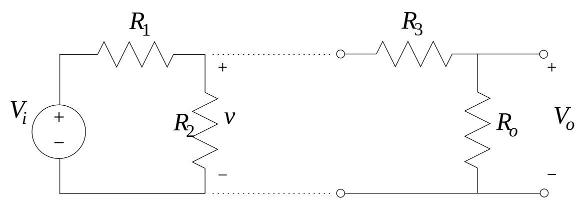


Figura 2.31: Conexón de dos circuitos

Calcule y explique:

(a) La resistencia (impedancia) de entrada $R_{eq.e}$ a cada circuito vista desde la fuente.

(b) La resistencia (impedancia) de salida $R_{eq.s}$ de cada circuito vista desde la carga R_o.

(c) En el circuito (b) la tensión v está *aislada* de R_3 y R_o. Por ello, se tiene

$$v_b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i \ .$$

donde el subíndice b indica el circuito estudiado.

¿Cómo se ve afectada la tensión v_a en el circuito (a) por las resistencias R_3 y R_o? ¿v_a es mayor o menor que v_b? *Ayuda:* muestre que en el circuito (a), la tensión $v_a < v_b$. En el circuito (a), se dice el circuito compuesto por las resistencias R_3 y R_o "carga" al primer circuito. Considere los siguientes valores: $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 30$ kΩ, $R_3 = 6$ kΩ y $R_o = 24$ kΩ. ¿En qué porcentaje se carga? Por ejemplo, si v pasa de 30 [V] (circuito (b)) a 21 [V] (circuito (a)), el valor de v está a un $21/30 = 0.7 = 70\%$ de su valor nominal.

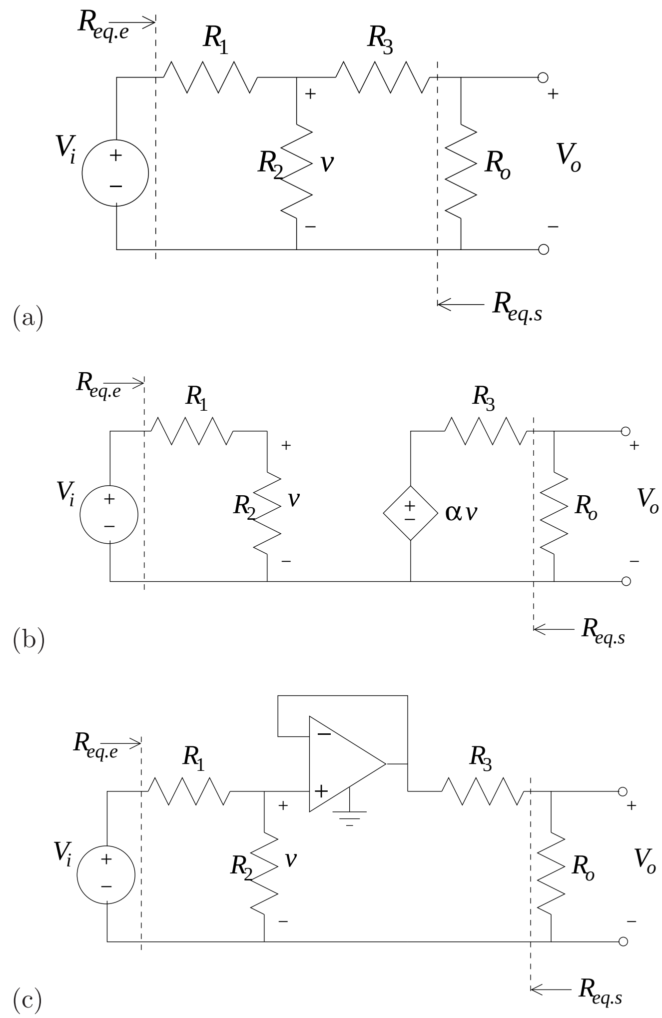


Figura 2.32: Circuitos del Ejercicio 4

(d) ¿Cuál es el valor de V_o si $V_i = 10$ [V]? Observe las diferencias que existen entre el circuito (a) y los otros dos circuitos.
(e) Calcule la ganancia V_o/V_i para los tres circuitos.
(f) ¿Qué valor debe tener α para que los circuitos (a) y (b) tengan igual ganancia?
(g) Decimos que dos circuitos son *equivalentes* respecto a una resistencia R si generan la misma corriente y tensión en R. Con $\alpha = 1$, ¿el circuito (b) y el (c) serán equivalentes respecto a R_o? Dicho de otra forma, ¿la corriente i_o y la tensión V_o son iguales para los circuitos (b) y (c)?

Capítulo Tres

Equivalencias entre circuitos eléctricos

I Reducción de resistencias. Resistencia equivalente*

Un circuito compuesto por resistencias solamente puede reducirse a una sóla resistencia equivalente si se emplean las reglas de equivalencia adecuadas. Las configuraciones básicas a analizar son: serie, paralelo, estrella y triángulo.

II Motivación al Equivalente de Thévenin-Norton*

1 Ejemplo (Característica v-i para un circuito de 1-Puerto) Considere la Figura 3.1, donde se muestra un arreglo de elementos circuitales de forma que se pueden como un sólo elemento de 1-Puerto 2-Terminales. Se desea obtener la característica v-i en función de la corriente i del puerto y la tensión v del puerto.

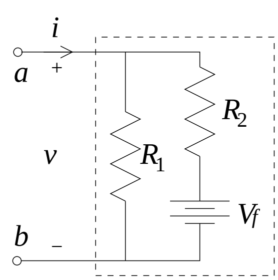


Figura 3.1: Circuito del Ejemplo II.1

Se deducen las siguientes relaciones:

$$i - i_1 - i_2 = 0$$
$$-v + R_1 i_1 = 0$$
$$-v + R_2 i_2 + V_f = 0$$

Despejando i_1 e i_2 de las dos últimas ecuaciones y sustituyendo en la primera se obtiene la relación entre i y v:

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v - V_f}{R_2} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})v - \frac{V_f}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v - \frac{V_f}{R_2} \quad (3.1)$$
$$\Longrightarrow \; i = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}(v - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_f)$$

o equivalentemente

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = v - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_f \quad (3.2)$$

Esta relación se representa en la Figura 3.2 para $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$ y $V_f = 10$ [V].

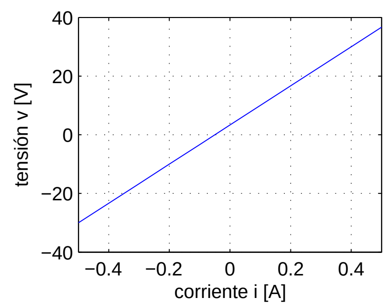


Figura 3.2: Curva v-i

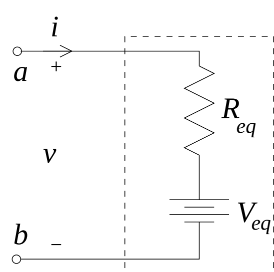


Figura 3.3: Fuente de tensión no ideal

Esta curva es la misma que se obtiene para la fuente de tensión, en serie con un resistor, mostrada en la Figura 3.3:

$$R_{eq} i = v - V_{eq} \quad (3.3)$$

Al comparar (3.2) con (3.3) se obtienen las relaciones

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.4}$$

$$V_{eq} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_f \tag{3.5}$$

Es decir, pueden conseguirse valores apropiados de R_{eq} y V_{eq} para que la relación tensión-corriente del circuito mostrado en la Figura 3.1 se puede representar mediante el circuito de la Figura 3.3.

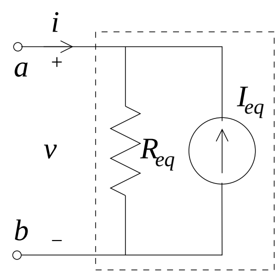


Figura 3.4: Fuente de corriente no ideal

PREGUNTA. ¿Cuáles deben ser los valores de R_{eq} e I_{eq} del circuito en la Figura 3.4 para que su característica v-i sea equivalente a la del circuito de la Figura 3.1?

Respuesta: reescribiendo la relación (3.1) se tiene

$$i = \frac{v}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} - \frac{V_f}{R_2} = \frac{v}{R_{eq}} - I_{eq}$$

Es decir, $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $I_{eq} = \frac{V_f}{R_2}$. (**Verificique la relación v-i de la fuente de corriente no ideal.**) Observe que el valor de R_{eq} obtenido es el mismo para el caso de la fuente de tensión con R_{eq} en serie, véase (3.4).

Bibliografía

Chua, L. O., Desoer, C. A. & Kuh, E. S. (1987), *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, New York, EE.UU.

Dawkins, P. (2005), 'Online math notes'.

DeCarlo, R. A. & Lin, P.-M. (2001), *Linear Circuit Analysis: Time domain, phasor, and Laplace transform approaches*, 2 edn, Oxford University Press, New York.

Dorf, R. & Svoboda, J. A. (2006), *Introduction to Electrical Circuits*, 7 edn, John Wiley and Sons, EE.UU.

Hefferon, J. (2006), 'Linear algebra'. GNU Free Documentation License.

Millman, J. & Grabel, A. (1987), *Microelectronics*, 2 edn, Mcgraw-Hill, New York.

Plonus, M. A. (2001), *Electronics and Communications for Scientists and Engineers*, Harcourt & Academic Press, Orlando, Florida, EE.UU.

Schiller, C. (2007), 'Motion mountain: The adventure of physics'.

Índice Alfabético