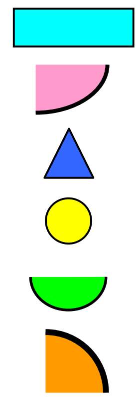
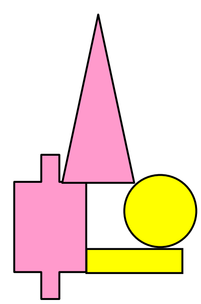
Tema III: Momento de Inercia

- Segundo momento o momento de inercia de un área.
- Determinación del momento de inercia de una área.
- Momento de inercia de áreas típicas.
    - Momento de inercia de un área rectangular.
    - Momento de inercia de una parábola.
    - Momento de inercia de un Triangulo.
    - Momento de inercia de un Círculo.
    - Momento de inercia del Semicírculo.
    - Momento de inercia del cuarto de círculo.



- Momento Polar de inercia del área.
- Radio de Giro de un área.
- Teorema de los ejes paralelos o Teorema de STEINER.
- Producto de inercia.
- Momento de inercia respecto a los ejes centroidales de áreas más usadas:
    - Rectángulo.
    - Triangulo.
    - Círculo.
    - Parábola.
- Momento de inercia de áreas compuestas.



- Ejes principales y momentos principales de inercia.

TEMA III

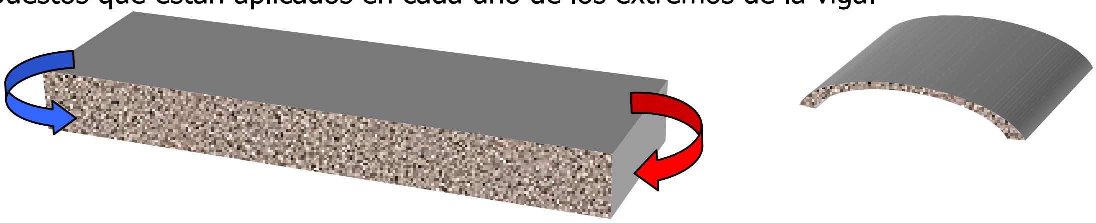
MOMENTO DE INERCIA:

En muchos problemas técnicos figura el cálculo de una integral de la forma $\int y^2 dA$, donde **y** es la distancia de un elemento de superficie (dA) a un eje contenido en el plano del elemento (ejes x ó Y) o normal a éste (eje Z).

Resulta conveniente desarrollar dicha integral para las superficies de formas más corrientes (círculo, rectángulo, triangulo, entre otras) y tabular los resultados a fin de tenerlos a mano.

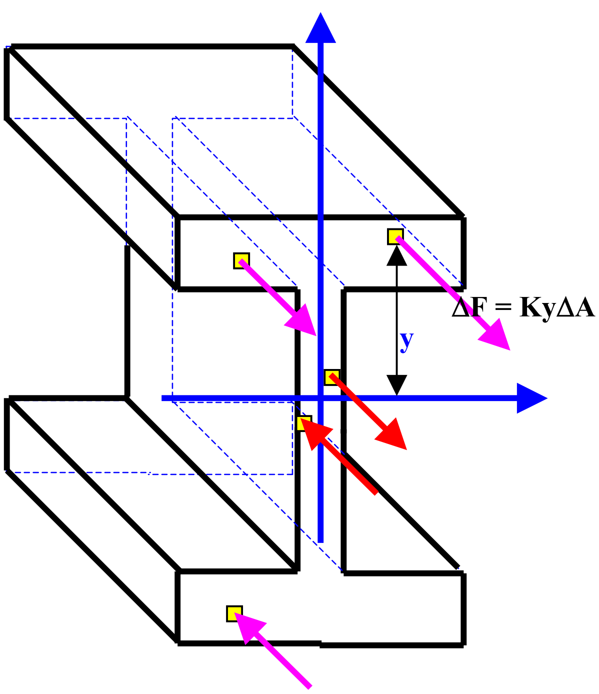
Ejemplo:

1. Una viga de sección transversal uniforme está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga.



Se afirma que la viga bajo estas condiciones está a flexión Pura.

En mecánica de los materiales se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección transversal de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes, **ΔF=KyΔA**, varían linealmente con la distancia "y" que hay entre el elemento de área **ΔA** y un eje que pasa a través el centroide de la sección.



Nota : El eje que pasan a través del centroide de la sección se llaman Eje Neutro ó Eje centroidal.

Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas a tracción, mientras que en el otro lado del eje neutro son fuerzas a compresión, lo cual permite decir que la resultante de las fuerzas sobre el eje neutro es cero.

En forma general la magnitud de la resultan de las fuerzas ΔF, que actuan en un diferencial de área ΔA, es **R**

$$R = \int K y_e dA = K \int y_e dA = K\bar{Y}A$$

$$\int y_e dA = \bar{Y}A \text{ es el primer momento del área}$$

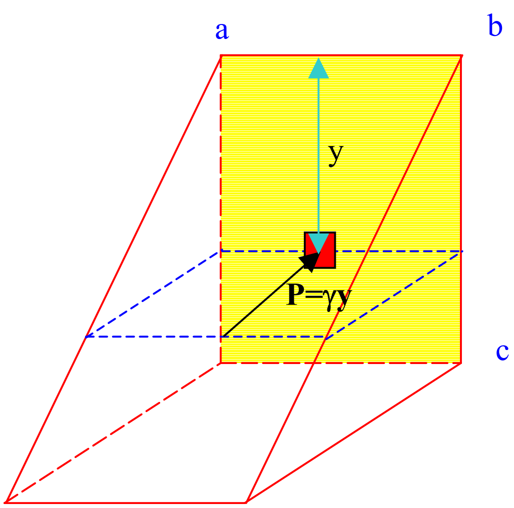
En este caso R= cero, ya que la cantidad $\bar{Y}A$=0 define el centroide por el área, el cual se encuentra sobre el eje X. Por lo tanto el sistema de las ΔF se reduce a un par, cuya magnitud **M** es la suma de los momentos dM=y*ΔF=y^2*ΔF de las fuerzas elementales. $M = \int dM = \int Ky^2 dA = k\int y^2 dA$

La integral $\int y^2 dA$ **define el segundo momento del área o momento de inercia de la sección de la viga con respecto al eje horizontal** (x)**.**

El segundo momento se obtiene integrando sobre la sección de la viga, el producto del área dA por el cuadrado de la distancia "y"existente entre el eje (x) y el diferencial de área.

Como cada producto y^2dA es positivo la integral $\int y^2 dA$ **será positiva, independientemente del valor y signo de la distancia "y".**

2. El agua actuando sobre una superficie vertical ABCD produce sobre cada elemento diferencial de área una presión proporcional a la profundidad del elemento P=γy. El momento respecto a el eje AB debido a la fuerza ejercida sobre el elemento dA es dM = dF*y =PdAy =(γydA)y = γy^2dA = γ(y^2dA). El momento total sobre la superficie ABCD, **M**, es la suma de todos los momentos diferenciales dM.

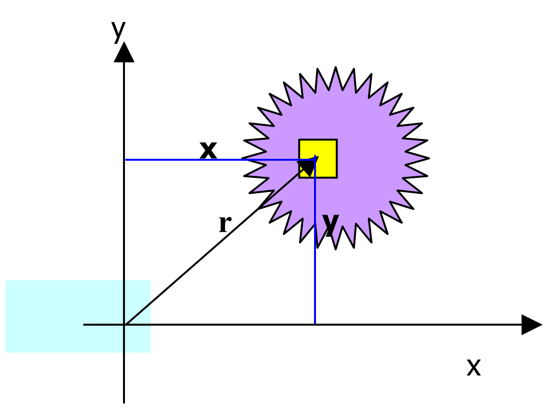


$$M_{total} = \int dM = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$

donde la integral $\int y^2 dA$ representa la inercia del área "A" respecto al eje AB, se denota por I_{ab}, siendo el subíndice el nombre del eje sobre el cual se toma el momento.

El momento de inercia tiene unidades de longitud al cuadrado. Ejemplo: cm^4 , m^4, $pulg^4$.

Momento de inercia y sus propiedades:



$$I_x = \int x^2 dA$$

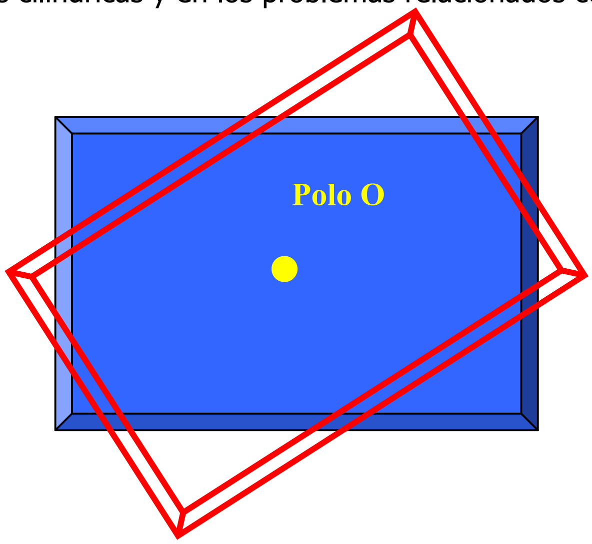
$$I_y = \int y^2 dA$$

$$I_z = I_o = J_z = \int r^2 dAIx = \int (x^2 + y^2) dA =$$

$$I_z = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

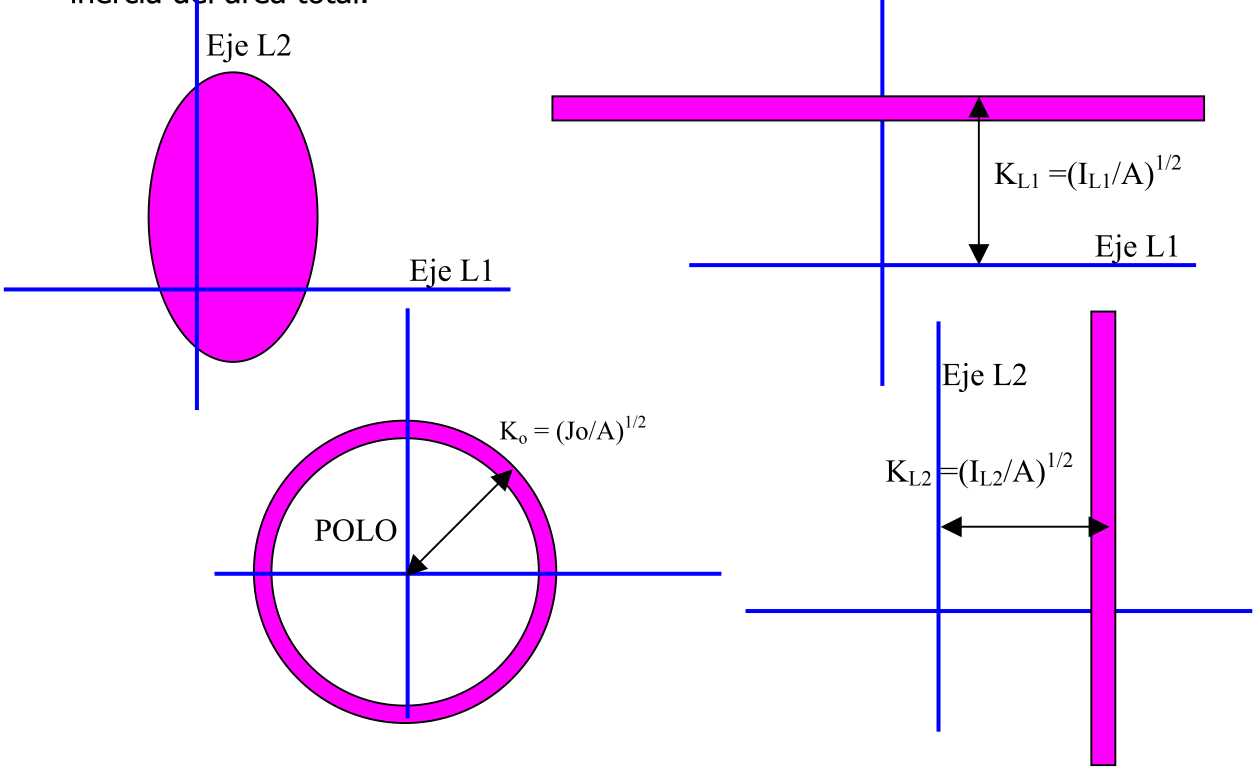
El momento de inercia de un área respecto al eje polar, momento polar de inercia J_o, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en el plano del área y que se intercepta en el eje polar.

El momento polar de inercia es de gran importancia en los problemas relacionados con la torsión de barras cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas.



Radio de giro :

Representa la distancia K, perpendicular respecto al eje L, a la cual habría que colocarse el área concentrada de tal manera que produzca el mismo momento de inercia del área total.



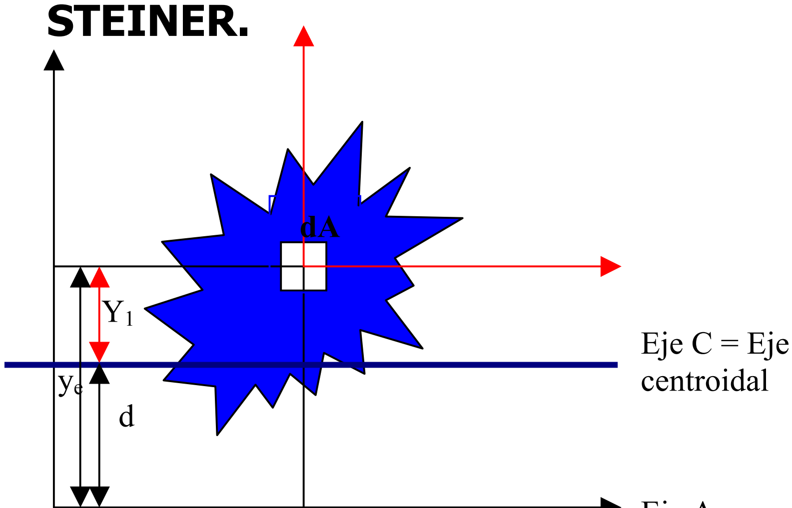
El radio de giro expresa un medida de la distribución del área respecto al eje.

$I_x = K_x^2 A \qquad K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

$I_y = K_y^2 A \qquad K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$; donde $I_x + I_y = I_z = K_o^2 A \rightarrow Ko^2 = Kx^2 + Ky^2$

$I_z = J_o = K_z^2 A \qquad Ko = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$

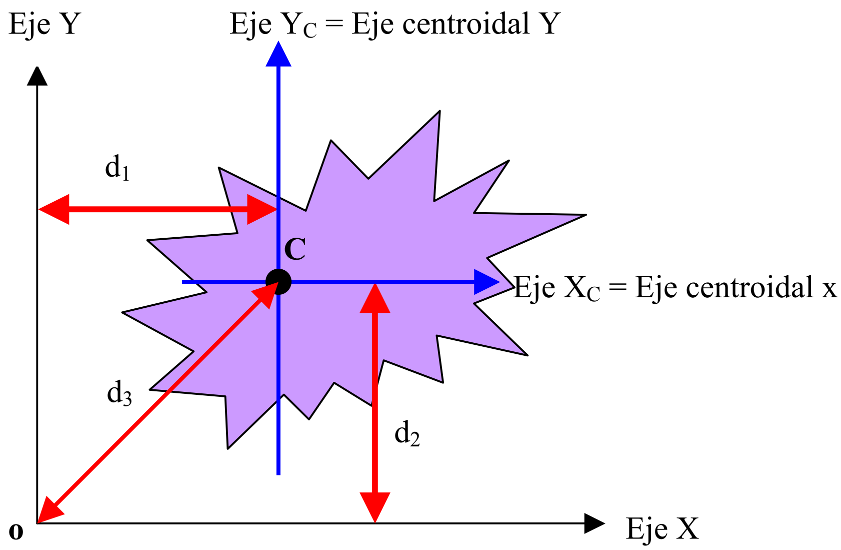
TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER.



$$y_e = d + y_1$$
$$I_A = \int y_e^2 dA$$
$$I_A = \int (y_1 + d)^2 dA =$$
$$= \int y_1{}^2 dA + 2\int d y_1 dA + \int d^2 dA =$$
$$= \int y_1{}^2 dA + 2d\int y_1 dA + d^2 \int dA$$

La integral $\int y_1\, dA = \overline{Y}A$, representa el primer momento del área con respecto al eje C. Si el centroide del área se localiza en el Eje C, dicha integral será nula.
La integral $\int dA = A$, representa el área total.
La integral $\int y_1{}^2 dA$, define el momento de inercia de un área con respecto del eje C, finalmente el segundo momento del área total se consigue mediante:
$I_A = \bar{I} + d^2 A$
El momento de inercia I de un área con respecto a cualquier eje A, I_A, es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo centroidal más el producto del área multiplicada por el cuadrado de la distancia (d) entre los dos ejes. Dicho en otras palabras la distancia d es la distancia existente entre el eje centroidal (Eje C) hasta el eje donde se desea calcular el momento de inercia (Eje A).
LOS EJES A Y C DEBEN SER PARALELOS (Eje A // Eje C)
LIMITANTE: el teorema de Steiner sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

Para comprender los términos de la ecuación que define el teorema de los ejes paralelos, se ilustra a continuación un área A (figura morada) con su centroide en el punto C y el origen de coordenadas pasando por el punto "o".



$$J_o = \overline{J_c} + Ad_3{}^2$$

$$K_o^2 = \overline{K_c^2} + d_3{}^2$$

donde:

J_o: momento polar de inercia de un área con respecto de un punto O.
$\overline{J_c}$ es el momento polar de inercia de un área respecto a su centroide C.
d_3: distancia entre el polo o y el centroide C.

$$I_x = \overline{I_x} + Ad^2 \quad --> \quad K_x^2 = \overline{k_x^2} + d^2$$

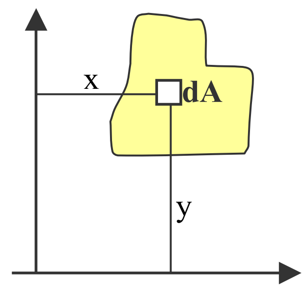
$$I_y = \overline{I_y} + Ad^2 \quad --> \quad K_y^2 = \overline{k_y^2} + d^2$$

En las cuatro expresiones precedentes, la distancia **d** debe interpretarse como la distancia entre los dos eje paralelos involucrados; dependiendo el caso, se tomará como la distancia (d_2) entre los ejes **X** y **X**$_{\textbf{centroidal}}$, o se razonará como la distancia (d_1) entre los eje **Y** e **Y**$_{\textbf{centroidal}}$.

PRODUCTO DE INERCIA

Otra integral de aparición frecuente en análisis ingenieriles es la integral de la forma:

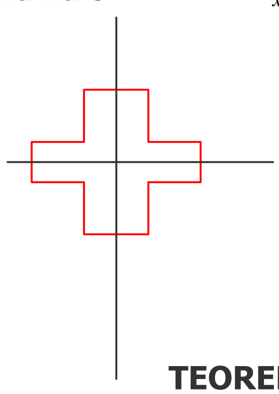
$$I_{xy} = \int xy dA$$

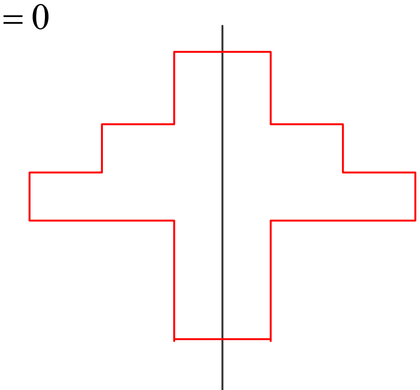


Ésta integral es considerada como el producto de inercia del área A respecto a los ejes coordenados XY. Contrario a lo que sucede con el momento de Inercia puede ser positiva, negativa ó cero.

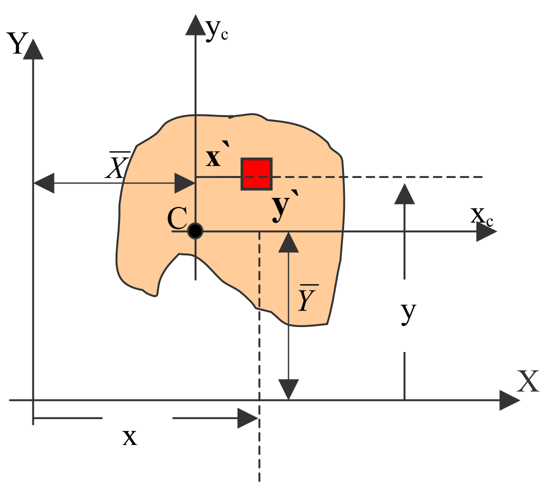
Cuando uno ó ambos de los ejes (x $\wedge$ y) es un eje de simetría el producto de inercia será nulo.

$$I_{xy} = \int xy dA = 0$$





TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS



$$I_{XY} = \int xy dA = \int (x' + \overline{x})(y' + \overline{y}) dA =$$

$$I_{XY} = \int x' y' dA + \int x' \overline{y} dA + \int \overline{x} y' dA + \int \overline{x}\overline{y} dA$$

$$I_{xy} = \overline{I}_{xy} + \overline{x}\overline{y} \int dA \qquad \text{dado que :}$$

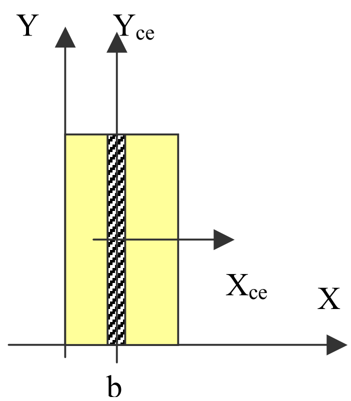
$\int x' \overline{y} dA + \int \overline{x} y' dA$ serán cero pues $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son cero

por estar ubuicados en el centroide C o en los ejes $x_c y_c$

El producto de inercia (I_{xy}) respecto a los ejes x $\wedge$ y ubicados en el plano del área será equivalente a la suma del producto de inercia respecto a los ejes centroidales ($\bar{I}_{xy}$) más el producto del área A por las distancias **x** e **y** desde los ejes x y hasta los ejes centroidales.

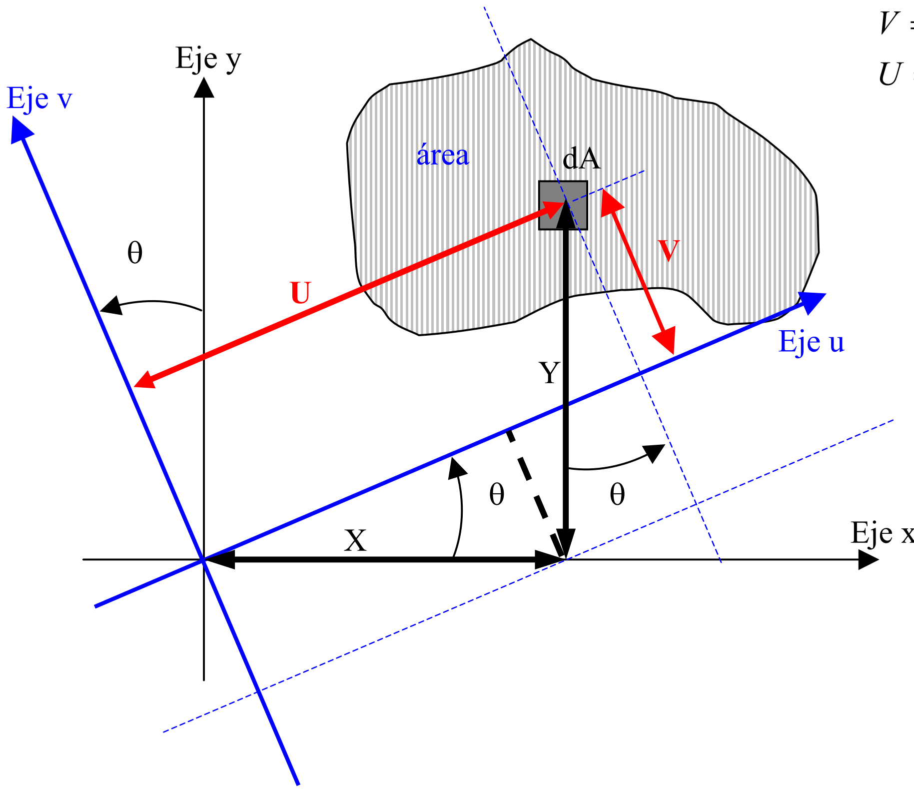
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + xyA$$

Producto de inercia de un rectángulo



De acuerdo al teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia es $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + xyA$, aplicando dicho teorema a un diferencial de área se tiene: $dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + xydA$. Como el diferencial de área (dA=h*dx) (rectángulo rayado) es simétrico respecto a sus ejes centroidales (X_{ce},x_{ce}), el valor del producto diferencial de inercia centroidal es nulo, $d\overline{I_{xy}} = 0$. Los valores de x e y se definen mediante las siguientes expresiones: $x = x \quad ; y = \frac{h}{2}$. Finalmente para obtener el producto de inercia del rectángulo (área amarilla) respecto a los ejes X,Y se plantea la siguiente integral: $I_{xy} = \int dI_{xy} = \int_0^b x\frac{h}{2}hdx = \frac{h^2}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{h^2b^2}{4}$.

EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA



$$V = y*\cos\theta - x*sen\theta$$
$$U = x*\cos\theta + y*sen\theta$$

Cálculo de los momentos de inercia respecto a los ejes U y V (ejes aules):

$$I_u = \int_{área} V^2 dA = \int (y\cos\theta - xsen\theta)^2 dA = \int (y\cos\theta)^2 dA + \int (-2*y\cos\theta * xsen\theta) dA + \int (xsen\theta)^2 dA =$$

$$I_u = \cos^2\theta \int (y)^2 dA - 2*\cos\theta * sen\theta \int xy\, dA + sen^2\theta \int (x)^2 dA =$$

$$I_u = \cos^2\theta * I_x - sen(2\theta) * I_{xy} + sen^2\theta * I_y$$