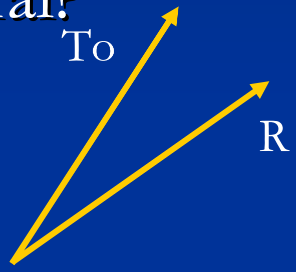
Otra forma de obtener la ecuación del eje central

Eje central: es el lugar geométrico, conformado por puntos (una recta), donde se obtiene el mínimo valor posible de momento para un sistema de fuerzas-pares.

Eje central

- ¿Como obtener un punto “A” que pertenece al eje central?



$$\overline{T}_o = \overline{T}_A + \overline{OA} \times \overline{R}$$

$$\overline{T}_A = \overline{T}_o - \overline{OA} \times \overline{R}$$

- Si el punto “A” pertenece al eje central.

$$\overline{T}_A = \lambda \overline{R}$$

$$\overline{T}_o - \overline{OA} \times \overline{R} = \lambda \overline{R} \qquad \text{Ec. I}$$

- Multiplicando la Expresión Ec. I vectorialmente por el vector R.

Eje central

- Se obtiene:

$$\overline{T}_o \times \overline{R} - \left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R} = \lambda \overline{R} \times \overline{R}$$

$$\overline{T}_o \times \overline{R} - \left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R} = 0$$

$$\overline{T}_o \times \overline{R} = \left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R} \qquad \textbf{Ec. II}$$

Recordando el producto vectorial entre tres vectores, se obtiene:

$$\overline{D} \times \left(\overline{B} \times \overline{C}\right) = \left(\overline{D} \bullet \overline{C}\right) \cdot \overline{B} - \left(\overline{D} \bullet \overline{B}\right) \cdot \overline{C}$$

$$\left(\overline{B} \times \overline{C}\right) \times \overline{D} = -\overline{D} \times \left(\overline{B} \times \overline{C}\right) = -\left(\overline{D} \bullet \overline{C}\right) \cdot \overline{B} + \left(\overline{D} \bullet \overline{B}\right) \cdot \overline{C}$$

Eje central

- Desarrollando el producto vectorial $\left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R}$

$$\left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R} = \left(\overline{R} \bullet \overline{OA}\right) \cdot \overline{R} - \left(\overline{R} \bullet \overline{R}\right) \cdot \overline{OA}$$

$$\left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R} = \left(\overline{R} \bullet \overline{OA}\right) \cdot \overline{R} - R^2 \cdot \overline{OA}$$

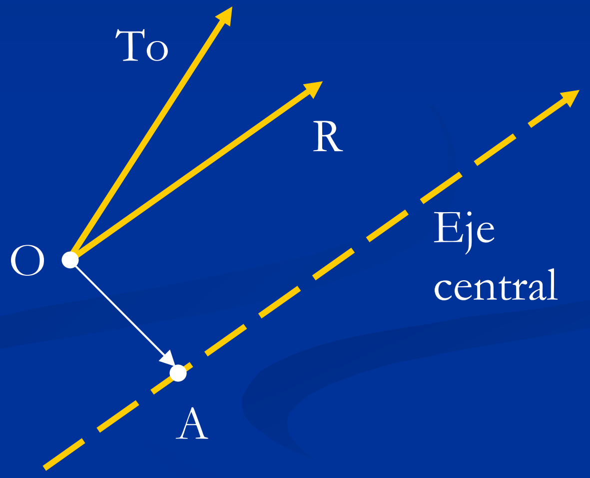
- Sustituyendo en la expresión Ec. II se obtiene:

$$\overline{T}_o \times \overline{R} = \left(\overline{OA} \times \overline{R}\right) \times \overline{R}$$

$$\overline{T}_o \times \overline{R} = \left(\overline{R} \bullet \overline{OA}\right) \cdot \overline{R} - R^2 \cdot \overline{OA}$$

Eje central

- Si OA es perpendicular a R se cumple que $\left(\overline{R} \bullet \overline{OA}\right) \cdot \overline{R} = 0$



- Por ende: $\overline{T}_o \times \overline{R} = -R^2 \cdot \overline{OA}$

- Despejando el vector OA se tiene:

$$\overline{OA} = -\frac{\overline{T}_o \times \overline{R}}{R^2}$$

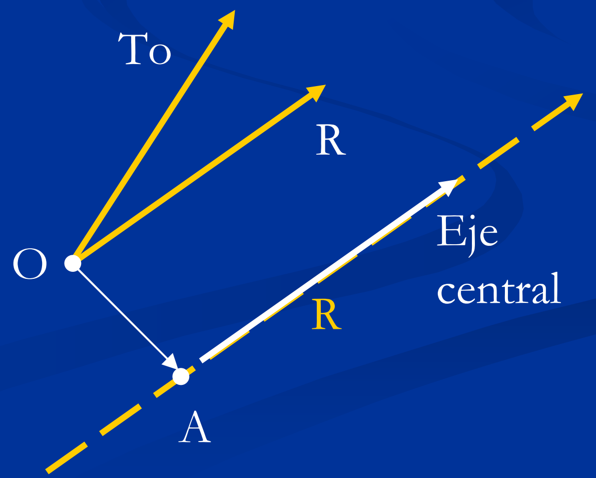
$$\overline{OA} = \frac{\overline{R} \times \overline{T}_o}{R^2} = \left[A_x, A_y, A_z\right]$$ Punto “A” del eje central.

Eje central

Se puede definir la ecuación del eje central mediante:

$$\frac{X - A_x}{R_x} = \frac{Y - A_y}{R_y} = \frac{Z - A_z}{R_z}$$

Eje central



Ejemplo

- Al reducir un sistema general fuerzas – pares en B(1,2,0) se obtuvo:

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} Tn$$

$$\overline{T_b} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} Tn * m$$

- Obtener la ecuación del eje central.

Solución:

$$\overline{BA} = \frac{\overline{R} \times \overline{T_b}}{R^2} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} Tn^2 * m}{\left(\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}\right)^2 Tn^2}$$

$$= \frac{\left[-45; +40; -5\right]}{50} = \left[-\frac{45}{50}; \quad \frac{40}{50}; \quad \frac{-5}{50}\right] m$$

Ejemplo

Continuación de la solución:

$$\overline{BA} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.8 & -0.1 \end{bmatrix} m$$

$$\overline{BA} = \begin{bmatrix} (a_x - 1) & (a_y - 2) & a_z \end{bmatrix}$$

$$-0.9 = a_x - 1 \qquad \rightarrow a_x = 0.1$$
$$0.8 = a_y - 2 \qquad \rightarrow a_y = 2.8$$
$$-0.1 = a_z \qquad \rightarrow a_z = -0.1$$

Ecuación del eje central:

$$\frac{x - 0.1}{3} = \frac{y - 2.8}{4} = \frac{z + 0.1}{5}$$