

CAPITULO III

DISEÑO DE ANCLAJES PARA LA ESTABILIZACION DE TALUDES ROCOSOS EN TRES DIMENSIONES

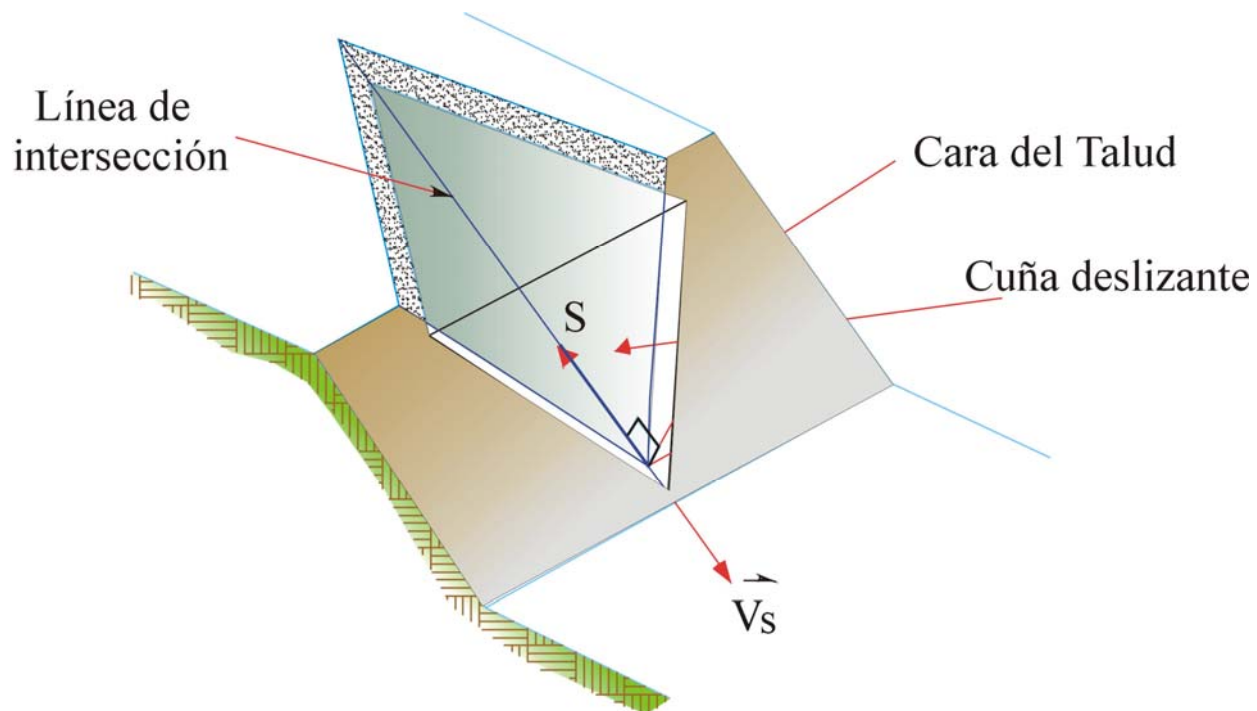
3.1.- INTRODUCCION

En el presente capítulo se lleva a cabo un método de cálculo que permite obtener la mínima fuerza de anclaje requerida para evitar el movimiento de un bloque o cuña deslizando cuando sus posibilidades de movimiento están restringidas a una sola dirección, pero el deslizamiento ocurre a través de dos planos de fracturas, ver figura(3.1).

El factor de seguridad previo al soporte se determina utilizando el procedimiento sugerido por Kovari y Fritz [1].

Posteriormente se deduce la expresión analítica, en donde se logra calcular la fuerza del tirante anclado para elevar el coeficiente de seguridad de la cuña a condiciones estables, en función de los ángulos ζ , Ω , η , que forma el anclaje con el sistema de coordenadas elegido (s, n, h). El eje (s) coincide con la intersección de los dos planos de fractura, el eje (n), es normal a (s), y se encuentra en un plano vertical, y el eje (h), es perpendicular a los ejes (s) y (n), y es horizontal.

figura 3.1



A través de la metodología analítica desarrollada en esta investigación es posible determinar la fuerza mínima de anclaje para estabilizar la cuña de roca, la cual depende en gran parte de los ángulos de fricción ϕ_1 y ϕ_2 de ambas discontinuidades, así como de los ángulos θ_1 y θ_2 que forman los respectivos planos de deslizamiento con el plano vertical.

Igualmente se toma en cuenta la influencia que tiene el nuevo coeficiente de seguridad requerido para incrementar la estabilidad del bloque de roca, y el ángulo α_s que forma la línea de intersección de ambos planos de discontinuidad con la horizontal.

También al analizar los aspectos prácticos de dicho estudio, es razonable considerar como una primera aproximación que la fuerza de anclaje se encuentre actuando en el plano vertical (s, n). Esto simplifica notablemente el problema, aunque es recomendable llevar a cabo una gran variedad de ejemplos prácticos que verifiquen si dicha suposición es correcta, sobre todo para diferentes valores de ϕ_1 y ϕ_2 , conjuntamente con el incremento del factor de seguridad debido a la incorporación del soporte.

Un aspecto positivo de los resultados aquí obtenidos, es que el valor del ángulo (ζ) coincide bastante bien con la recomendación propuesta por Hoek y Bray [2], en la cual, la inclinación óptima (ζ) para instalar el anclaje actuando en el mencionado plano vertical, debe ser tal que, el anclaje forme un ángulo aproximadamente igual a $1/2(\phi_1 + \phi_2)$ con la línea de intersección de los planos de discontinuidad.

Por otro lado es necesario destacar que una dirección de la fuerza de anclaje diferente a la orientación más favorable requerirá de fuerzas mucho mayores.

3.2.- GENERALIDADES

En la rotura por cuña, objeto del presente análisis, el desplazamiento está controlado por la dirección de la recta de intersección de dos planos de discontinuidad, formando un bloque de roca cuyo factor de seguridad dependerá de la geometría y propiedades geomecánicas de la cuña.

Estas dos discontinuidades están dispuestas oblicuamente a la superficie del talud, con la línea de intersección de ambas aflorando sobre el plano del talud, y buzando en sentido desfavorable. Por otro lado la condición geométrica que hace posible el deslizamiento, corresponde cuando el ángulo de inclinación de la línea de intersección α_s es menor que la inclinación del talud β .

Este tipo de rotura ocurre con preferencia en taludes rocosos donde existe la tendencia apropiada del rumbo y buzamiento de los planos de deslizamiento.

3.3.- ANALISIS DE LA ESTABILIDAD EN ROTURA POR CUÑAS

A través de la figura (3.2) se puede observar la cuña deslizante de peso W y superficies de apoyo A y B, y las fuerzas que intervienen con el objeto de determinar el coeficiente de seguridad de la cuña.

Se ha utilizado como sistema de coordenadas rectangulares (s, n, h) el propuesto por Kovari y Fritz [1]. El eje (s) coincide con la intersección de los dos planos de discontinuidad, el eje (n) es normal a (s) y se encuentra en un plano vertical, y el eje (h) es perpendicular a (s) y (n), es decir horizontal. Siendo los vectores unitarios en los ejes mencionados \vec{e}_s , \vec{e}_n y \vec{e}_h .

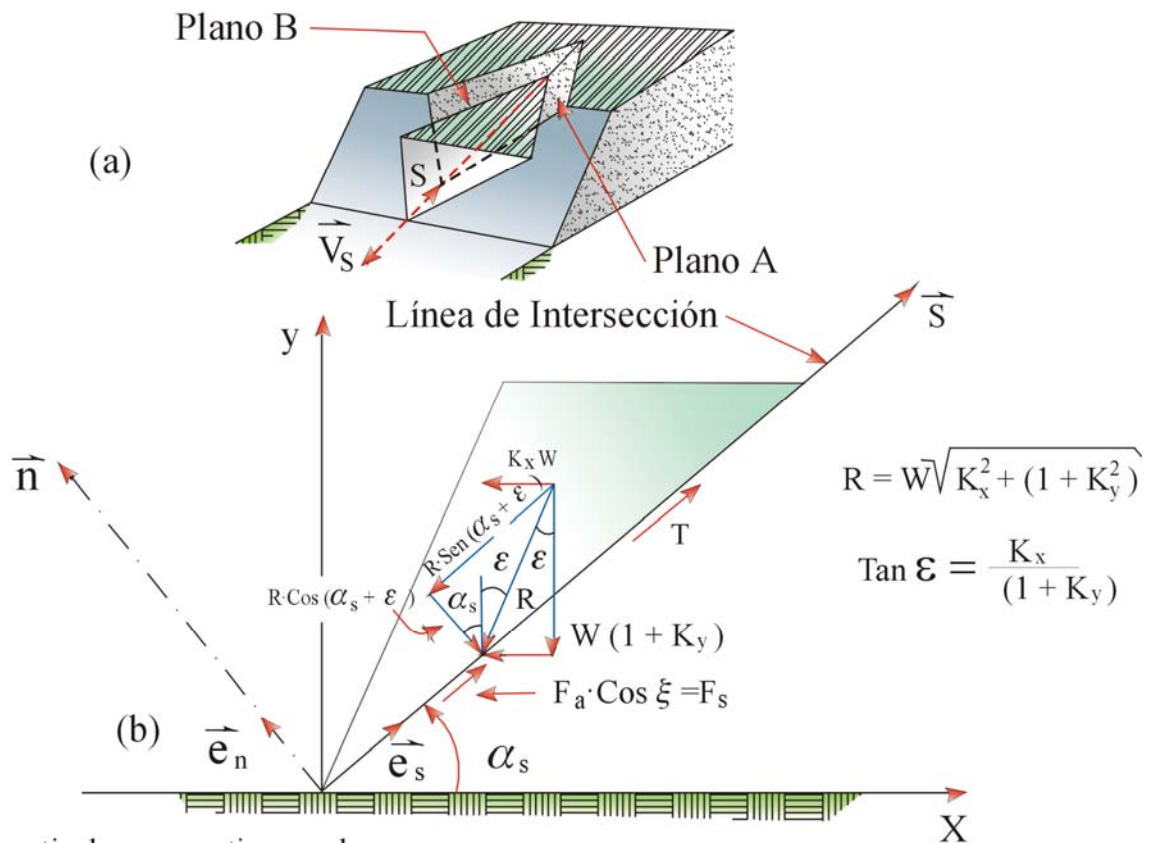
El ángulo α_s de la inclinación de la recta de intersección (s) de ambos planos de deslizamiento puede calcularse analíticamente en función del buzamiento y la dirección de buzamiento de los planos de discontinuidad.

Así de acuerdo a la figura (3.3) y (3.4) los vectores unitarios normales a dichos planos están definidos como sigue:

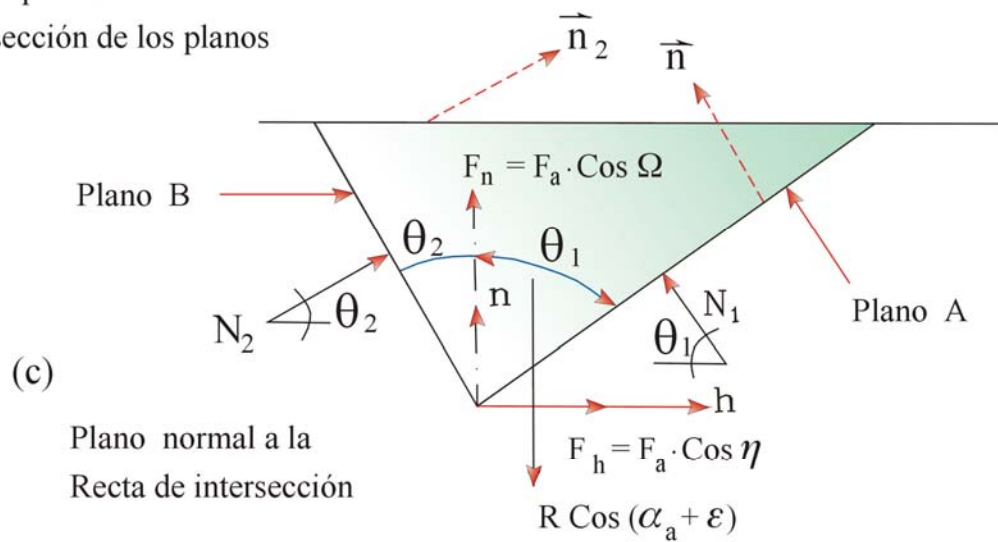
$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_1 &= \text{sen}\alpha_1 \cos\psi_1 \vec{i} + \text{sen}\alpha_1 \text{sen}\psi_1 \vec{j} - \cos\alpha_1 \vec{k} \\ \vec{n}_2 &= \text{sen}\alpha_2 \cos\psi_2 \vec{i} + \text{sen}\alpha_2 \text{sen}\psi_2 \vec{j} - \cos\alpha_2 \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

figura 3.2

Perspectiva Isométrica

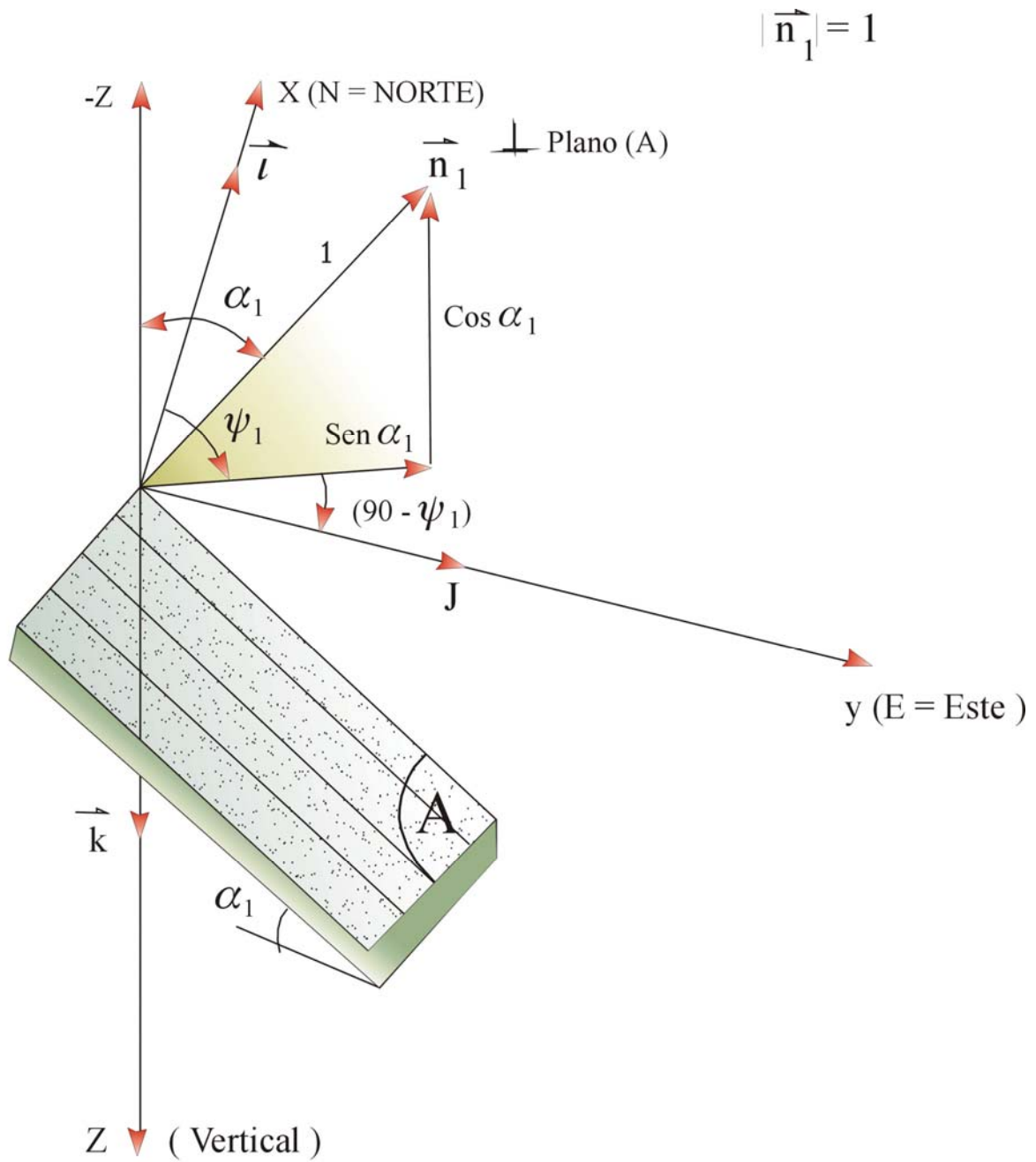


Plano vertical que contiene a la
Línea de intersección de los planos
A y B.



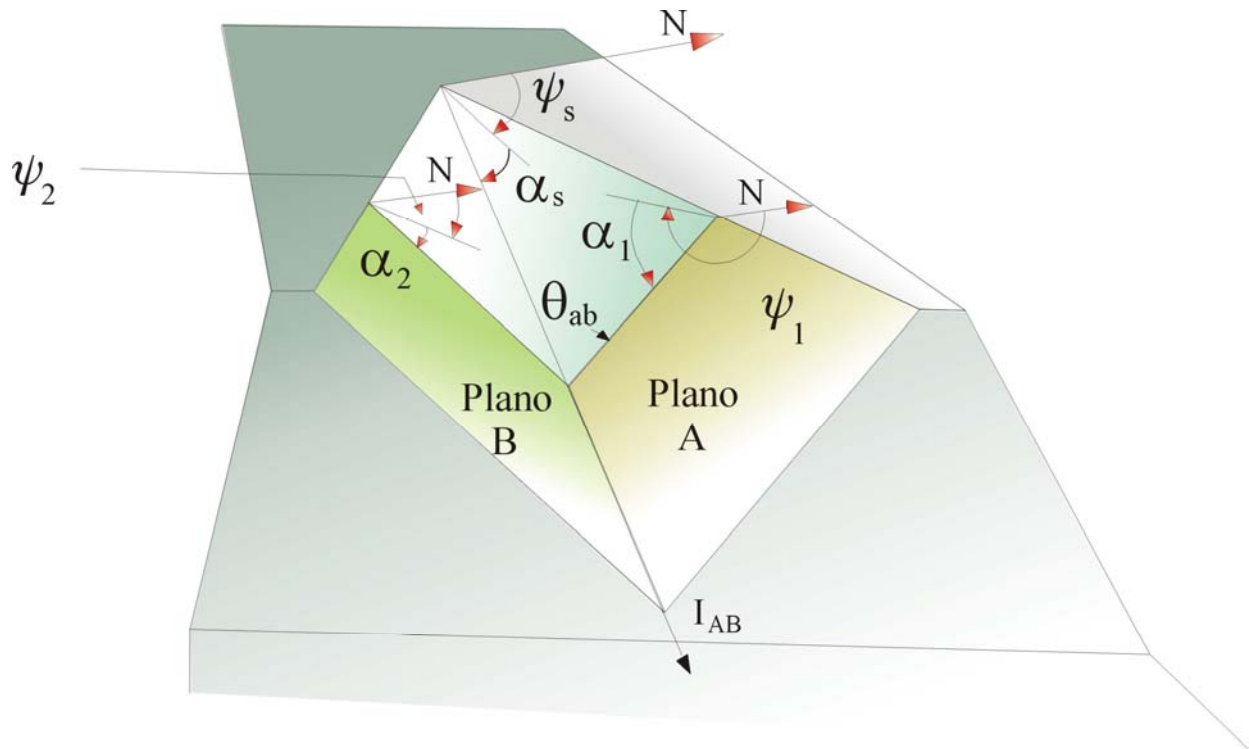
Geometría de la cuña y fuerzas que
Intervienen en su estabilidad

figura 3.3



$$\vec{n}_1 = \sin \alpha_1 \cos \psi_1 \vec{i} + \sin \alpha_1 \sin \psi_1 \vec{j} - \cos \alpha_1 \vec{k}$$

figura 3.4



Planos de discontinuidad indicando el buzamiento y la dirección de buzamiento de acuerdo al Energy Mines and Resources Canada [3].

donde:

α_1 y ψ_1 corresponden al buzamiento y dirección de buzamiento del plano de discontinuidad (A) respectivamente.

α_2 y ψ_2 se refieren al buzamiento y dirección de buzamiento del plano (B) respectivamente ($\alpha_2 > \alpha_1$).

La dirección de la línea de intersección de los planos potenciales de deslizamiento (A) y (B) se determina mediante el producto vectorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, por lo tanto:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (3.2)$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin \alpha_1 \cos \psi_1 & \sin \alpha_1 \sin \psi_1 & -\cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \cos \psi_2 & \sin \alpha_2 \sin \psi_2 & -\cos \alpha_2 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{v} = (-\sin \alpha_1 \sin \psi_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \sin \psi_2 \cos \alpha_1) \vec{i} + (\sin \alpha_1 \cos \psi_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \psi_2 \cos \alpha_1) \vec{j} + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) \vec{k} \quad (3.4)$$

Es decir:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= (-\sin \alpha_1 \cdot \sin \psi_1 \cdot \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cdot \sin \psi_2 \cdot \cos \alpha_1) \\ v_y &= (\sin \alpha_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cdot \cos \psi_2 \cdot \cos \alpha_1) \\ v_z &= \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Expresándose por lo tanto el vector unitario \vec{v} como sigue:

$$\vec{v}_s = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}}{\pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (3.6)$$

Igualmente al considerar la figura (3.5), se aprecia que la orientación del vector unitario \vec{v}_s está definida por el azimut ψ_s y por su inclinación α_s con la horizontal (en inglés plunge), medido en un plano vertical y es equivalente al buzamiento de un plano.

Tomando en cuenta lo dicho anteriormente, conjuntamente con la figura (3.5) se obtiene que:

$$\vec{v}_s = \cos \alpha_s \cos \psi_s \vec{i} + \cos \alpha_s \sin \psi_s \vec{j} + \sin \alpha_s \vec{k} \quad (3.7)$$

y

$$\tan \psi_s = \frac{v_y}{v_x} = \left[\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cdot \cos \psi_2 \cdot \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \psi_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cdot \sin \psi_1 \cdot \cos \alpha_2} \right] \quad (3.8)$$

es decir:

$$\tan \psi_s = \left[\frac{\tan \alpha_1 \cdot \cos \psi_1 - \tan \alpha_2 \cdot \cos \psi_2}{\tan \alpha_2 \cdot \sin \psi_2 - \tan \alpha_1 \cdot \sin \psi_1} \right] \quad (3.9)$$

Igualmente a través de dicha figura resulta:

FIGURA 3.5

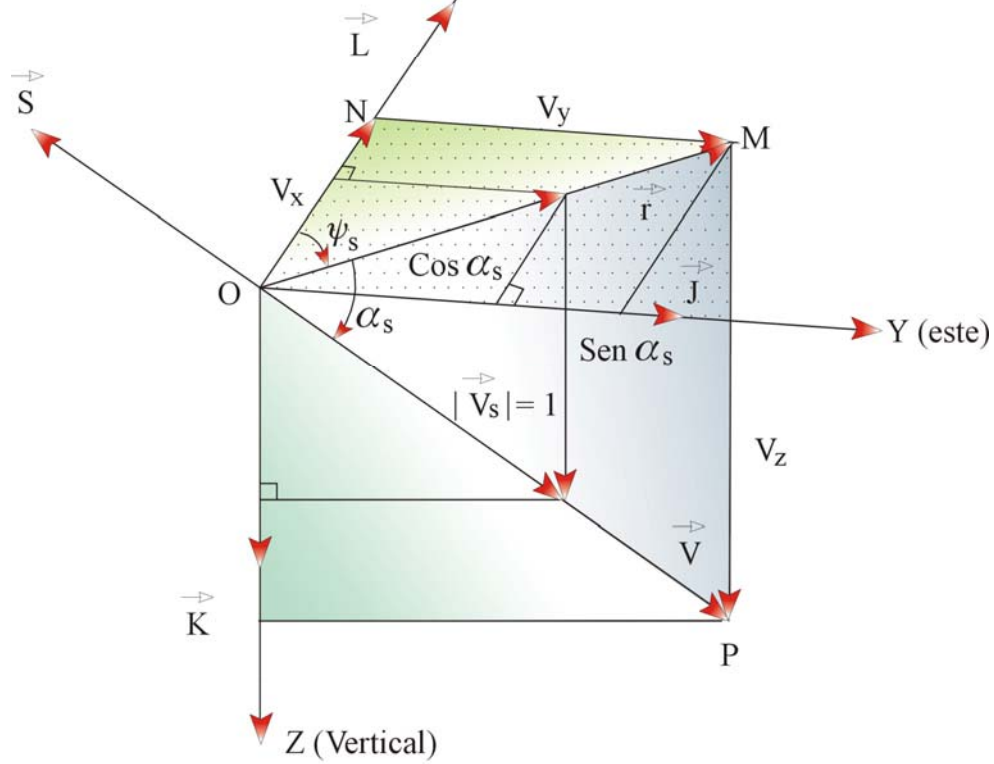
$$V_x = \overline{ON} = |\vec{r}| \cos \psi_s$$

$$V_y = \overline{NM} = \left| \vec{r} \right| \text{ Sen. } \psi_s$$

$$V_y = \overline{NP}$$

$$\vec{OP} = \vec{V}$$

$$\vec{OM} = \mathbf{r}$$



$$\vec{V}_s = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \cos \alpha_s \cos \psi_s \vec{L} + \cos \alpha_s \sin \psi_s \vec{J} + \sin \alpha_s \vec{K}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{L} + V_y \vec{J} + V_z \vec{Z}$$

$$\tan \alpha_s = \left(\frac{v_z}{r} \right) = \left(\frac{v_z}{v_y} \right) \sin \psi_s \quad (3.10)$$

$$\tan \alpha_s = \left[\frac{\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 \cdot \sin(\psi_2 - \psi_1)}{\tan \alpha_1 \cdot \cos \psi_1 - \tan \alpha_2 \cdot \cos \psi_2} \right] \sin \psi_s \quad (3.11)$$

La línea de intersección de inclinación α_s se considera positiva en el sentido que va descendiendo.

La ecuación anterior puede simplificarse obteniéndose:

$$\tan \alpha_s = [\tan \alpha_2 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_s)] \quad (3.12)$$

Una forma práctica de calcular la inclinación de la línea de intersección α_s en función de α_1 , α_2 y $\Delta\psi = (\psi_2 - \psi_1)$, es a través de las ecuaciones (3.6) y (3.7), observándose que:

$$\sin \alpha_s = \frac{v_z}{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)^{1/2}} \quad (3.13)$$

Al reemplazar los valores de v_x , v_y y v_z de la ecuación (3.5) en la fórmula anterior resulta:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_s &= \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\psi_2 - \psi_1)}{f[\alpha_1, \alpha_2, (\psi_2 - \psi_1)]} \\ f[(\alpha_1, \alpha_2, (\psi_2 - \psi_1)] &= [\sin^2 \alpha_1 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 \cdot \cos^2 \alpha_1 \\ &- 1/2 \sin 2\alpha_1 \cdot \sin 2\alpha_2 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) + \sin^2 \alpha_1 \cdot \sin^2 \alpha_2 \cdot \sin^2(\psi_2 - \psi_1)]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Utilizando (3.14), se ha elaborado la tabla (3.1) para cada serie de datos α_1 , α_2 y $\Delta\psi$, la cual corresponde exactamente con la construida por Kovari y Fritz [4].

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14)**

α_1°	α_2°	$\Delta\psi^\circ = \text{Diferencia de azimuts}$						
		150	140	130	120	110	100	90
20	20	5.4	7.1	8.7	10.3	11.8	13.2	14.4
	25	6.0	8.0	9.8	11.5	13.2	14.6	16.0
	30	6.6	8.7	10.6	12.5	14.2	15.7	17.1
	35	7.0	9.2	11.3	13.3	15.0	16.6	17.9
	40	7.4	9.8	11.9	13.9	15.7	17.2	18.5
	45	7.8	10.2	12.4	14.4	16.2	17.7	18.9
	50	8.1	10.6	12.9	14.9	16.7	18.1	19.2
	55	8.4	11.0	13.3	15.3	17.1	18.5	19.4
	60	8.7	11.3	13.7	15.7	17.4	18.7	19.6
25	25	6.9	9.1	11.1	13.1	15.0	16.7	18.2
	30	7.6	10.0	12.3	14.4	16.4	18.3	19.9
	35	8.2	10.8	13.3	15.5	17.6	19.5	21.2
	40	8.8	11.5	14.1	16.5	18.6	20.5	22.2

	45	9.3	12.2	14.8	17.3	19.5	21.4	22.9
	50	9.8	12.8	15.5	18.0	20.2	22.0	23.5
	55	10.2	13.3	16.1	18.6	20.8	22.6	23.9
	60	10.6	13.8	16.7	19.2	21.3	23.0	24.4

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14) (Continuación)**

α_1°		$\Delta\psi^\circ = \text{Diferencia de azimuts}$					
		80	70	60	50	40	30
20	20	15.6	16.6	17.5	18.3	18.9	19.4
	25	17.2	18.3	19.1	19.7	20.0	
	30	18.3	19.2	19.8			
	35	19.0	19.7	20.0			
	40	19.4	19.9				
	45	19.7	20.0				
	50	19.8					
	55	19.9					
	60	20.0					
25	25	19.7	20.9	22.0	22.9	23.7	24.2
	30	21.4	22.7	23.7	24.5	25.0	
	35	22.6	23.8	24.6	25.0		
	40	23.5	24.5	25.0			
	45	24.1	24.8				

	50	24.5	25.0				
	55	24.7					
	60	24.9					

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14) (Continuación)**

α_1°	α_2°	$\Delta\psi^\circ = \text{Diferencia de azimuts}$						
		150	140	130	120	110	100	90
30	30	8.5	11.2	13.7	16.1	18.3	20.4	22.2
	35	9.3	12.2	15.0	17.5	19.9	22.1	24.0
	40	10.0	13.1	16.1	18.8	21.3	23.5	25.4
	45	10.7	14.0	17.1	19.9	22.4	24.7	26.6
	50	11.3	14.8	18.0	20.9	23.4	25.6	27.5
	55	11.9	15.5	18.8	21.8	24.3	26.5	28.2
	60	12.5	16.2	19.6	22.6	25.1	27.2	28.7
	55	8.4	11.0	13.3	15.3	17.1	18.5	19.4
	60	8.7	11.3	13.7	15.7	17.4	18.7	19.6
35	35	10.3	13.5	16.5	19.3	21.9	24.2	26.3
	40	11.2	14.6	17.9	20.9	23.6	26.1	28.3
	45	12.0	15.7	19.1	22.3	25.1	27.6	29.8
	50	12.8	16.7	20.3	23.6	26.5	29.0	31.1
	55	13.6	17.7	21.4	24.7	27.7	30.1	32.2
	60	14.4	18.6	22.5	25.8	28.7	31.1	33.0

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14) (Continuación)**

α_1°		$\Delta\psi^\circ = \text{Diferencia de azimuts}$					
		80	70	60	50	40	30
30	30	23.9	25.3	26.6	27.6	28.5	29.1
	35	25.7	27.2	28.4	29.3	29.9	
	40	27.1	28.4	29.4	30.0		
	45	28.1	29.3	29.9			
	50	28.8	29.7				
	55	29.3	29.9				
	50	19.8					
	60	29.7					
35	35	28.2	29.8	31.2	32.4	33.3	34.1
	40	30.2	31.8	33.2	34.2	34.8	
	45	31.7	33.2	34.3	34.9		
	50	32.8	34.1	34.9			
	50	32.8	34.1	34.9			
	55	33.7	34.7				
	60	34.3	34.9				

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14) (Continuación)**

α_1°	α_2°	$\Delta\psi^\circ$ = Diferencia de azimuts						
		150	140	130	120	110	100	90
40	40	12.3	16.0	19.5	22.8	25.7	28.3	30.7
	45	13.3	17.3	21.1	24.5	27.6	30.3	32.7
	50	14.3	18.6	22.5	26.1	29.3	32.1	34.5
	55	15.3	19.8	23.9	27.6	30.8	33.6	35.9
	60	16.2	21.0	25.3	29.0	32.2	34.9	37.1
45	45	14.5	18.9	22.9	26.6	29.8	32.7	35.5
	50	15.7	20.4	24.7	28.5	31.9	34.9	37.5
	55	16.9	21.9	26.4	30.3	33.8	36.8	39.3
	60	18.1	23.2	28.0	32.1	35.6	38.5	40.9
50	50	17.1	22.2	26.7	30.8	34.4	37.5	40.1
	55	18.6	23.9	28.7	33.0	36.6	39.8	42.5
	60	20.1	25.7	30.7	35.1	38.8	41.9	44.5
55	55	20.3	26.0	31.1	35.5	39.3	42.6	45.3
	60	22.1	28.2	33.5	38.0	41.9	45.1	47.8
60	60	24.1	31.6	36.2	40.9	44.8	48.1	50.8

**TABLA 3.1. ANGULO DE INCLINACION α_s , SEGÚN KOVARI Y FRITZ [4],
UTILIZANDO LA ECUACION (3.14) (Continuación)**

α_1°		$\Delta\psi^\circ = \text{Diferencia de azimuts}$					
		80	70	60	50	40	30
40	40	32.7	34.5	36.0	37.3	38.3	39.0
	45	34.8	36.6	38.0	39.1	39.8	
	50	36.5	38.1	39.2	39.9		
	55	37.7	39.1	39.9			
	60	38.7	39.7				
45	45	37.5	39.3	40.9	42.2	43.2	44.0
	50	39.6	41.5	43.0	44.1	44.8	
	55	41.1	43.1	44.3	44.9		
	60	42.8	44.1	44.9			
50	50	42.4	44.3	45.9	47.2	48.2	49.0
	55	44.7	46.5	48.0	49.1	49.8	
	60	46.6	48.2	49.3	50.0		
55	55	47.6	49.5	51.0	52.3	53.3	54.1
	60	50.0	51.8	53.2	54.3	54.9	
60	60	53.0	54.8	56.3	57.5	58.4	59.1

Para obtener el vector unitario \vec{e}_n normal a \vec{v}_s , sólo se requiere llevar a cabo el producto escalar $\vec{e}_n \cdot \vec{v}_s = 0$. Siendo \vec{e}_n igual a la siguiente expresión, de acuerdo a la figura (3.6).

$$\vec{e}_n = \cos \alpha_n \cos \psi_n \vec{i} + \cos \alpha_n \sin \psi_n \vec{j} - \sin \alpha_n \vec{k} \quad (3.15)$$

Por lo tanto al tomar en cuenta la ecuación (3.7) y (3.15) el producto $\vec{e}_n \cdot \vec{v}_s = 0$, resulta ser:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_n \cos \psi_n \cos \alpha_s \cos \psi_s + \cos \psi_n \sin \psi_n \cos \alpha_s \sin \psi_s - \sin \alpha_n \sin \alpha_s &= 0 \\ \cos \alpha_n \cos \alpha_s [\cos \psi_n \cos \psi_s + \sin \psi_n \sin \psi_s] - \sin \alpha_n \sin \alpha_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Lo que equivale a:

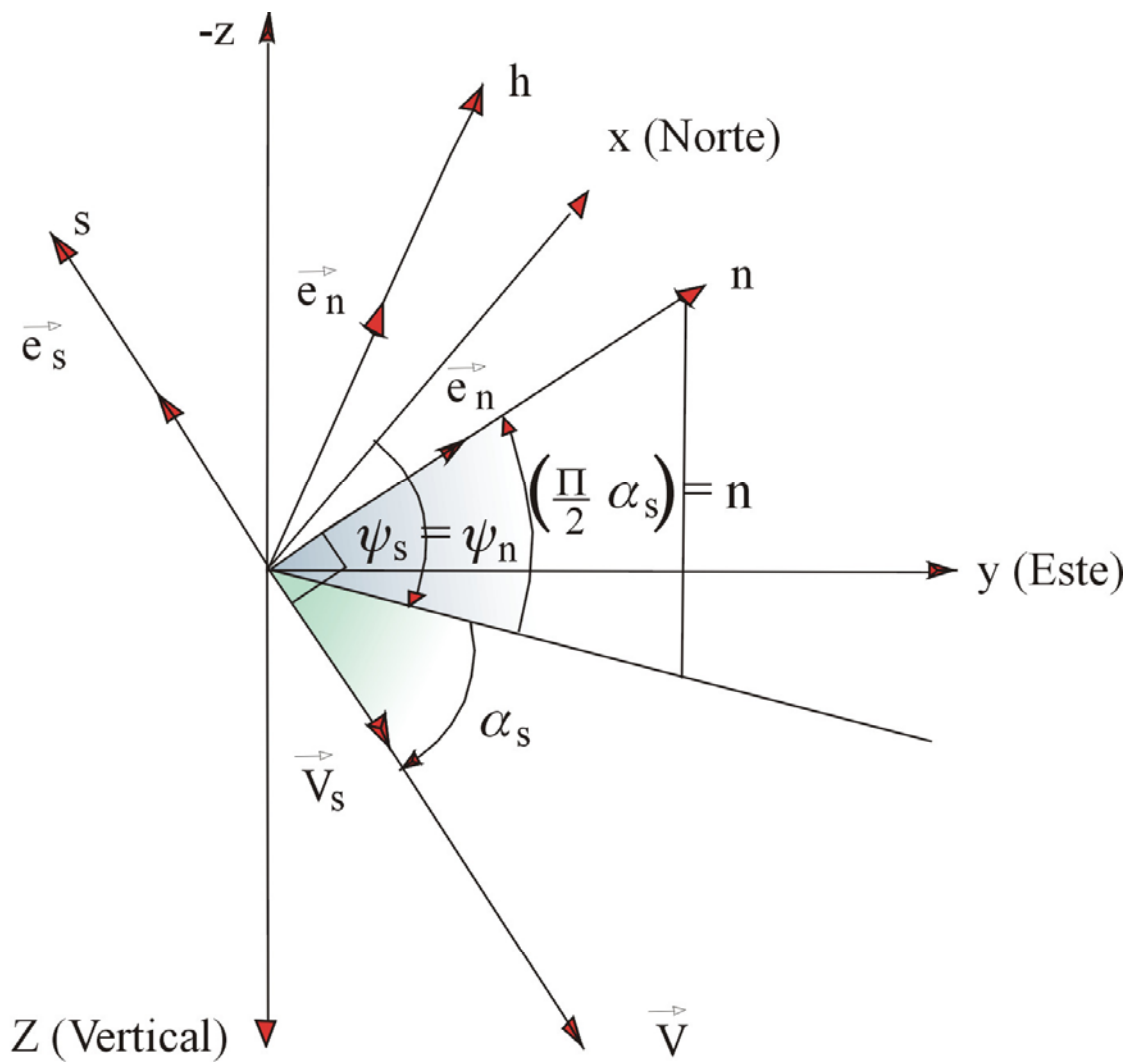
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_n \cos \alpha_s \cos(\psi_n - \psi_s) - \sin \alpha_n \sin \alpha_s &= 0 \\ \text{o también:} & \\ \cos \alpha_n \cos \alpha_s \cos(\psi_s - \psi_n) - \sin \alpha_n \sin \alpha_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Al reemplazar $\alpha_n = (90 - \alpha_s)$, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\psi_n - \psi_s) &= 1 \\ \cos(\psi_s - \psi_n) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \psi_n = \psi_s \quad (3.18)$$

Finalmente los tres vectores unitarios correspondientes al sistema de coordenadas (s,n,h) pueden expresarse como sigue (ver figura 3.6).

figura 3.6

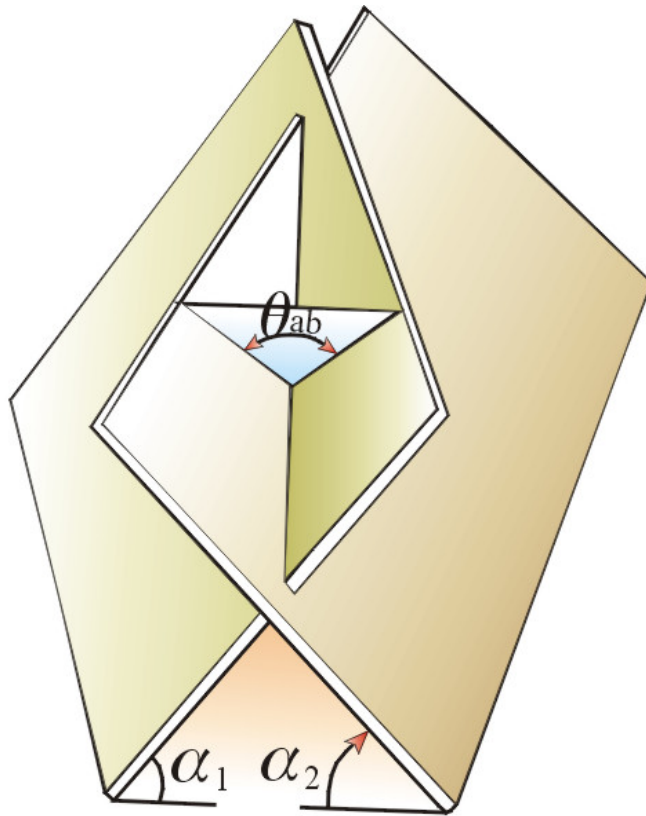


$$\vec{e}_s = -\vec{V}_s = -(\cos \alpha_s \cdot \cos \psi_s \vec{L} + \cos \alpha_s \cdot \sin \psi_s \vec{J} + \sin \alpha_s \vec{K})$$

$$\vec{e}_n = \sin \alpha_s \cdot \cos \psi_s \vec{I} + \sin \alpha_s \cdot \sin \psi_s \vec{J} - \cos \alpha_s \vec{K}$$

$$\vec{e}_h = \vec{e}_s \times \vec{e}_n = \sin_s \vec{I} - \cos_s \vec{J} + 0 \vec{K}$$

figura 3.7



Intersección de dos planos de discontinuidad
Mostrando el ángulo θ_{ab} que forman entre ellos
Según [5]

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_s &= -(\cos \alpha_s \cos \psi_s \vec{i} + \cos \alpha_s \sin \psi_s \vec{j} + \sin \alpha_s \vec{k}) = -\vec{v}_s \\ \vec{e}_n &= \sin \alpha_s \cos \psi_s \vec{i} + \sin \alpha_s \sin \psi_s \vec{j} - \cos \alpha_s \vec{k} \\ \vec{e}_h &= \vec{e}_s \times \vec{e}_n = \sin \psi_s \vec{i} - \cos \psi_s \vec{j} + 0 \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

El ángulo θ_{ab} (ver figura 3.7) formado por los dos planos de discontinuidad, se define como el ángulo que forman las direcciones positivas de sus normales. Este ángulo es igual a uno de los pares de ángulos diedros formados por los planos (A) y (B). Tomando en cuenta el producto escalar se obtiene:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cos \theta_{ab} \quad (3.20)$$

siendo $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$

resultando por tanto al considerar la ecuación (3.1):

$$\cos \theta_{ab} = \sin \alpha_1 \cdot \cos \psi_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \psi_2 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \psi_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \psi_2 + \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \quad (3.21)$$

Mediante simplificaciones trigonométricas resulta:

$$\cos \theta_{ab} = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) + \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \quad (3.22)$$

Tomando en cuenta las condiciones de equilibrio estático, y utilizando como sistema de coordenadas rectangulares (s, n, h), se obtiene de acuerdo a la figura (3.2):

$$\sum F_s = 0, \quad T + F_a \cdot \cos\zeta - R \cdot \sin(\alpha_s + \varepsilon) = 0 \quad (3.23)$$

$$\sum F_n = 0, \quad N_1 \cdot \sin\theta_1 + N_2 \cdot \sin\theta_2 + F_a \cdot \cos\Omega - R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) = 0 \quad (3.24)$$

$$\sum F = 0, \quad -N_1 \cdot \cos\theta_1 + N_2 \cdot \cos\theta_2 + F_a \cdot \cos\eta = 0 \quad (3.25)$$

Multiplicando la ecuación (3.24) por $\cos\theta_1$ y la ecuación (3.25) por $\sin\theta_1$ y sumando ambas expresiones resulta:

$$N_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cos\theta_1 - F_a (\cos\eta \cdot \sin\theta_1 + \cos\Omega \cdot \cos\theta_1) \quad (3.26)$$

Multiplicando la ecuación (3.24) por $\cos\theta_2$ y la ecuación (3.25) por $-\sin\theta_2$ y realizando el mismo procedimiento anterior, se obtiene:

$$N_1 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = F_a [\cos\eta \cdot \sin\theta_2 - \cos\Omega \cdot \cos\theta_2] + R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cdot \cos\theta_2 \quad (3.27)$$

siendo:

F_a = fuerza activa del anclaje requerida para estabilizar la cuña.

ζ, Ω, η = los ángulos que forma la fuerza de anclaje F con los ejes (s , n , h)
respectivamente (ver figura 3.8), siendo además $\cos^2\zeta + \cos^2\Omega + \cos^2\eta = 1$

Por otro lado:

\vec{F}_a = vector fuerza debido al anclaje

\vec{e}_s = vector unitario en la dirección de s .

\vec{e}_n = vector unitario en la dirección de n .

$\vec{e}_h = \vec{e}_s \times \vec{e}_n$ = vector unitario en la dirección de h .

siendo además

$$F_s = F_a \cdot \cos \zeta, \quad F_n = F_a \cdot \cos \Omega \quad \text{y} \quad F_h = F_a \cdot \cos \eta$$

F_s, F_n, F_h = componentes de la fuerza de anclaje actuando en la dirección de s, n y h respectivamente

θ_1, θ_2 = ángulos que forman los planos de deslizamiento y las normales n y n respectivamente.

N_1, N_2 = reacciones normales actuando sobre los planos de deslizamiento A y B.

T = reacción tangencial a determinarse en función de las ecuaciones de equilibrio

$$R = W \left[K_x^2 + (1 + K_y)^2 \right]^{1/2} = W \cdot K$$

W = peso de la cuña

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left[\frac{K_x}{1 + K_y} \right], \quad K = \left[K_x^2 + (1 + K_y)^2 \right]^{1/2}$$

K_y = coeficiente sísmico vertical

$W_y = W(1 + a_y/g) = W(1 + K_y)$. Fuerza vertical debido al peso de la cuña y al efecto sísmico generado por el terremoto o a la acción dinámica desarrollada durante la voladura.

K_x = coeficiente sísmico horizontal

$$W_x = W \left(\frac{a_x}{g} \right) = W \cdot K_x. \text{ Fuerza horizontal debido al movimiento sísmico o a la}$$

acción de la voladura. Está contenida en el plano vertical que incluye la línea de intersección (ver figura 3.2). Por lo general se considera que $K_y \cong K_x/2$.

Según el Pit Slope Manual [3], editado por Canada Centre for Mineral and Energy Technology (CANMET), el valor de W se puede calcular como sigue:

$$W = \frac{1}{6} \gamma \cdot K_w \left\{ \overline{AC}^3 \frac{\sin^2 \theta_{13} \sin \theta_{25}}{\sin^2 \theta_{15} \cdot \sin^2 \theta_{24}} - \overline{TC}^3 \frac{\sin^2 \theta_{37} \sin \theta_{58}}{\sin^2 \theta_{57} \sin \theta_{48}} \right\} \quad (3.28)$$

$$K_w = (1 - \cos^2 \theta_{34} - \cos^2 \theta_{35} - \cos^2 \theta_{45} + 2 \cos \theta_{34} \cdot \cos \theta_{35} \cdot \cos \theta_{45}) \quad (3.29)$$

γ = peso unitario de la masa rocosa

Para mayor detalle, véase figura (3.9)

α_s = ángulo que forma la línea de intersección de los planos A y B con la horizontal.

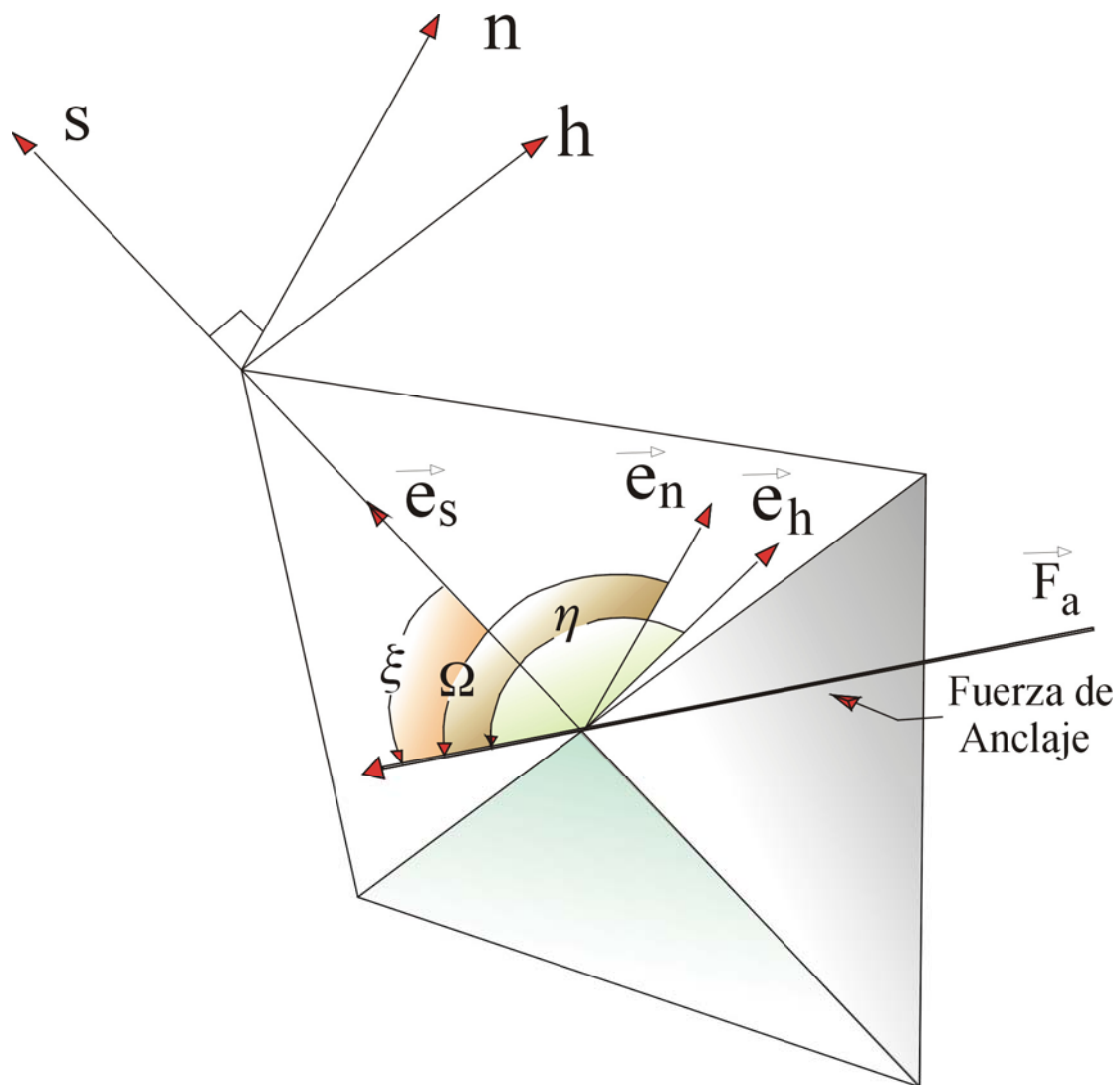
Los ángulos θ_1 y θ_2 se obtienen efectuando los productos escalares:

$$\vec{e}_n \cdot \vec{n}_1 = \sin \theta_1 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_s \cos(\psi_s - \psi_1) + \cos \alpha_1 \cos \alpha_s \quad (3.30)$$

y

$$\vec{e}_n \cdot \vec{n}_2 = \sin \theta_2 = \sin \alpha_2 \sin \alpha_s \cos(\psi_s - \psi_2) + \cos \alpha_2 \cos \alpha_s \quad (3.31)$$

FIGURA 3.8



$$\vec{F}_a = F_s \vec{e}_s + F_n \vec{e}_n + F_h \vec{e}_h$$

$$F_s = |\vec{F}_a| \cos \xi$$

$$F_n = |\vec{F}_a| \cos \Omega$$

$$F_h = |\vec{F}_a| \cos \eta$$

The diagram shows a triangular prism with vertices labeled A, B, C, O, T, V, and W. The top face is labeled 'SUPERFICIE SUPERIOR' and the bottom face is labeled 'CARA'. Two planes are indicated: 'PLANO A' and 'PLANO B'. The prism is divided into several regions numbered 1 through 9.

$$K_W = (1 - \cos^2 \theta_{34} - \cos^2 \theta_{35} - \cos^2 \theta_{45} + \cos^2 \theta_{34} \cdot \cos \theta_{35} \cdot \cos \theta_{45})^{1/2}$$

28

Igualmente se aprecia que el ángulo θ_{ab} el cual corresponde a uno de los pares de ángulos diedros formados por los planos (A) y (B) debe ser igual a:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{ab} = (\theta_1 + \theta_2) \\ \text{O también:} \\ (180 - \theta_{ab}) = (\theta_1 + \theta_2) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

El factor de seguridad al aplicar el criterio de rotura de Mohr-Coulomb, puede calcularse de la siguiente forma:

$$FS = \frac{T_{max}}{T} = \frac{(N_1 \tan \phi_1 + C_1 A_1) + (N_2 \tan \phi_2 + C_2 A_2)}{R \sin(\alpha_s + \varepsilon) - F_a \cos \xi} \quad (3.33)$$

siendo:

$N_1 \tan \phi_1 + C_1 A_1$ = máxima fuerza tangencial resistente medida en el plano (A)

$N_2 \tan \phi_2 + C_2 A_2$ = máxima fuerza tangencial resistente medida en el plano (B).

C_1, C_2 = cohesión medida a través del plano de diaclasa (A) y (B) respectivamente.

Si los planos de fractura están abiertos $C_1 = C_2 = 0$. Dicho caso en particular se considerará para fines prácticos en esta investigación.

Igualmente no se tomará en cuenta el efecto de la presión intersticial.

ϕ_1, ϕ_2 = ángulo de fricción interna del macizo rocoso de los planos (A) y (B) respectivamente.

A_1, A_2 = superficie de deslizamiento correspondiente al plano de discontinuidad (A) y (B) respectivamente.

Los valores de N_1, N_2 y T cuando $F_a = 0$ (no existe refuerzo), se transforman como sigue:

$$N_1 = R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cdot \cos\theta_2 / \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$N_2 = R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cdot \cos\theta_1 / \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.34)$$

$$T = R \cdot \sin(\alpha_s + \varepsilon)$$

Por lo tanto el valor de FS bajo estas condiciones y despreciando las fuerzas cohesivas, resulta al utilizar (3.28):

$$FS = \frac{\cos\theta_2 \cdot \tan\phi_1 + \cos\theta_1 \cdot \tan\phi_2}{\tan(\alpha_s + \varepsilon) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} = \left(\frac{\tan\phi^*}{\tan(\alpha_s + \varepsilon)} \right) \quad (3.35)$$

se observa que el factor $\tan\phi^*$, corresponde al obtenido por Kovari y Fritz [1], el cual está representado por la expresión:

$$\tan^* = \left[\frac{\cos\theta_2 \cdot \tan\phi_1 + \cos\theta_1 \cdot \tan\phi_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right] \quad (3.36)$$

Igualmente al tomar en cuenta la ecuación (3.35) se aprecia que:

$$y \left. \begin{aligned} A &= \frac{\cos \theta_2}{\tan \alpha_s \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ B &= \frac{\cos \theta_1}{\tan \alpha_s \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

A través de los parámetros (A) y (B), resulta la conocida ecuación para calcular la estabilidad de la cuña desarrollada por Hoek y Bray [2], para el caso particular que se considere el macizo rocoso con cohesión nula a través de los planos de discontinuidad y sin la acción de la presión intersticial, es decir:

$$FS = A \cdot \tan \phi_1 + B \cdot \tan \phi_2 \quad (3.38)$$

El coeficiente de seguridad activo $(FS)_a$ al aplicar la fuerza de anclaje F_a , se determina al substituir N_1 , de (3.27) y N_2 de (3.26) en la ecuación (3.33); es decir:

$$\begin{aligned} (FS)_a &= \frac{\{F_a [\cos \eta \sin \theta_2 - \cos \Omega \cos \theta_2] + R \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cos \theta_2\} \tan \phi_1}{[R \sin(\alpha_s + \varepsilon) - F_a \cos \xi] \sin(\theta_1 + \theta_2)} + \\ &+ \frac{\{R \cos(\alpha_s + \varepsilon) \cos \theta_1 - F_a (\cos \eta \sin \theta_1 + \cos \Omega \cos \theta_1)\} \tan \phi_2}{[R \sin(\alpha_s + \varepsilon) - F_a \cos \xi] \sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dividiendo numerador y denominador por $R.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2).\text{sen}(\alpha_s + \varepsilon)$ y agrupando términos se obtiene:

$$(FS)_a = \frac{\frac{F_a}{R.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2).\text{sen}(\alpha_s + \varepsilon)} \{ \cos \eta (\tan \phi_1 . \text{sen} \theta_2 - \tan \phi_2 . \text{sen} \theta_1) \}}{\left(1 - \frac{F_a \cos \xi}{R.\text{sen}(\alpha_s + \varepsilon)} \right)} + \frac{-\cos \Omega (\tan \phi_1 . \cos \theta_2 + \tan \phi_2 . \cos \theta_1) \} + FS}{\left(1 - \frac{F_a \cos \xi}{R.\text{sen}(\alpha_s + \varepsilon)} \right)} \quad (3.40)$$

$$\text{llamando } \bar{F} = \left[\frac{F_a}{R.\text{sen}(\alpha_s + \varepsilon).\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \right] \quad (3.41)$$

La ecuación (3.40) toma la forma:

$$(FS)_a \frac{\bar{F} \{ \cos \eta (\tan \phi_1 . \text{sen} \theta_2 + \tan \phi_2 . \text{sen} \theta_1) \}}{[1 - \bar{F} \cos \xi . \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]} + \frac{-\cos \Omega (\tan \phi_1 . \cos \theta_2 + \tan \phi_2 . \cos \theta_1) \} + FS}{[1 - \bar{F} . \cos \xi . \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]} \quad (3.42)$$

Al despejar \bar{F} de (3.42) se tiene:

$$\bar{F} = \left[\frac{\delta(FS)}{a.\cos \xi + b.\cos \eta + c.\cos \Omega} \right] \quad (3.43)$$

Siendo $\delta(FS) = (FS)_a - (FS)$, la diferencia entre el factor de seguridad considerando la fuerza activa del anclaje y sin ella respectivamente. Adicionalmente los parámetros a, b y c, se definen como sigue:

$$a = \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (FS)_a \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

$$b = (\tan\phi_1 \cdot \sin\theta_2 - \tan\phi_2 \cdot \sin\theta_1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

$$c = -(\cos\theta_2 \cdot \tan\phi_1 + \cos\theta_1 \cdot \tan\phi_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

Igualmente se conoce que los cosenos directores están vinculados por la ecuación:

$$\cos^2\xi + \cos^2\Omega + \cos^2\eta = 1 \quad (3.47)$$

En estas condiciones, el problema queda reducido en hallar la orientación del anclaje en la cual la fuerza requerida es mínima para valores conocidos de $\delta(FS)$, a, b y c, siendo las variables ξ , η y Ω .

Al substituir $\cos\xi$ de la ecuación (3.47) en (3.48) se obtiene que $\bar{F} = f(\Omega, \eta)$.

$$\bar{F} = \left[\frac{\delta(FS)}{a(1 - \cos^2\Omega - \cos^2\eta)^{1/2} + b \cdot \cos\eta + c \cdot \cos\Omega} \right] \quad (3.48)$$

Por lo tanto, al minimizar la fórmula anterior, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Omega} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.50)$$

es decir:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \Omega} = \left[\frac{a}{2} (1 - \cos^2 \Omega - \cos^2 \eta)^{-1/2} \cdot 2 \cos \Omega \sin \Omega - c \sin \Omega \right] \quad (3.51)$$

al simplificar resulta:

$$\frac{a \cos \Omega}{\left[1 - \cos^2 \Omega - \cos^2 \eta \right]^{1/2}} = c \quad (3.52)$$

Por cuanto $\cos \xi = (1 - \cos^2 \Omega - \cos^2 \eta)^{1/2}$, la ecuación (3.52) se transforma como sigue:

$$a \cdot \frac{\cos \Omega}{\cos \xi} = c \quad \therefore \quad \left[\frac{a}{\cos \xi} \right] = \left[\frac{c}{\cos \Omega} \right] \quad (3.53)$$

Igualmente, al considerar $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} = 0$, se obtiene:

$$\frac{a \cos \eta}{\left(1 - \cos^2 \Omega - \cos^2 \eta \right)^{1/2}} = b \quad (3.54)$$

Al tomar en cuenta (3.47) resulta:

$$\frac{a}{\cos \xi} \cos \eta = b \quad \therefore \quad \left(\frac{a}{\cos \xi} \right) = \left(\frac{b}{\cos \eta} \right) \quad (3.55)$$

Comparando (3.53) y (3.55) queda:

$$\left[\frac{c}{\cos \Omega} \right] = \left[\frac{b}{\cos \eta} \right] \quad (3.56)$$

Finalmente, a través de (3.47), (3.53) y (3.55), se obtiene que:

$$\cos^2 \xi + \left(\frac{c}{a} \right) \cos^2 \xi + \left(\frac{b}{a} \right) \cos^2 \xi = 1 \quad (3.57)$$

es decir:

$$\cos \xi = \left[\frac{1}{1 + (c/a)^2 + (b/a)^2} \right]^{1/2} \quad (3.58)$$

De esta forma una vez conocido ξ a través de (3.58), los ángulos Ω y η se determinan al utilizar las ecuaciones (3.53) y (3.55) respectivamente.

Con dichos valores el parámetro adimensional \vec{F} se determina mediante la fórmula (3.43), y la fuerza de anclaje F_a al considerar (3.41).

Finalmente si la fuerza de anclaje F_a actúa en el plano vertical que contiene a (s, n), el problema se simplifica por cuanto $\cos\eta = 0$ ($\eta = 90^\circ$).

Al observar la figura (3.10a) y aplicar las condiciones de equilibrio se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} T + F_a \cdot \cos\xi - R \cdot \sin(\alpha_s - \varepsilon) &= 0 \\ N_1 \cdot \sin\theta_1 + N_2 \cdot \sin\theta_2 - F_a \cdot \sin\xi - W \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon) &= 0 \\ N_2 \cdot \cos\theta_2 - N_1 \cdot \cos\theta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

A través de las dos últimas ecuaciones resulta;

$$N_1 = \frac{[F_a \cdot \sin\xi + R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon)] \cdot \cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.60)$$

y

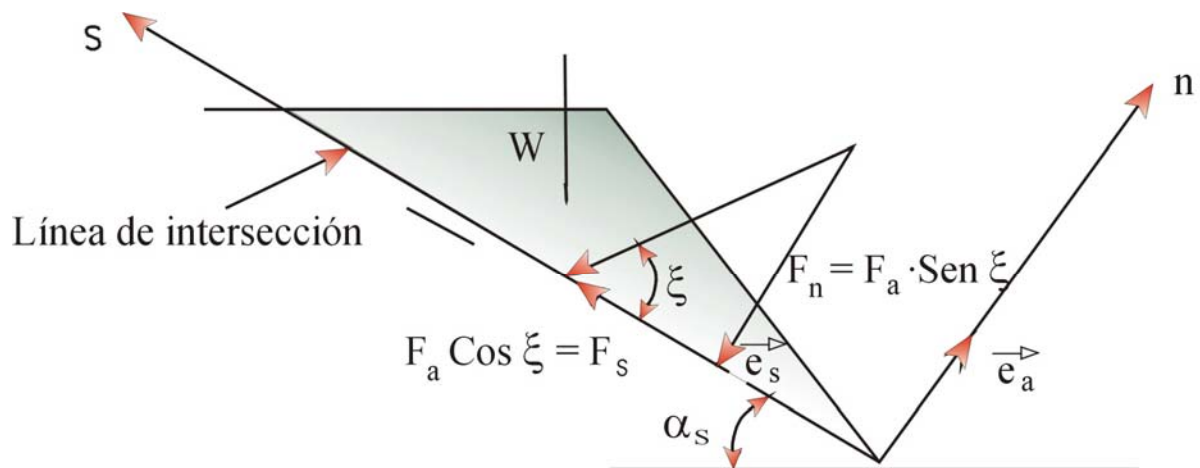
$$N_2 = \frac{[F_a \cdot \sin\xi + R \cdot \cos(\alpha_s + \varepsilon)] \cdot \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.61)$$

Reemplazando N_1 y N_2 en (3.33) y tomando en cuenta el caso específico que $C_1 = C_2 = 0$, resulta por tanto:

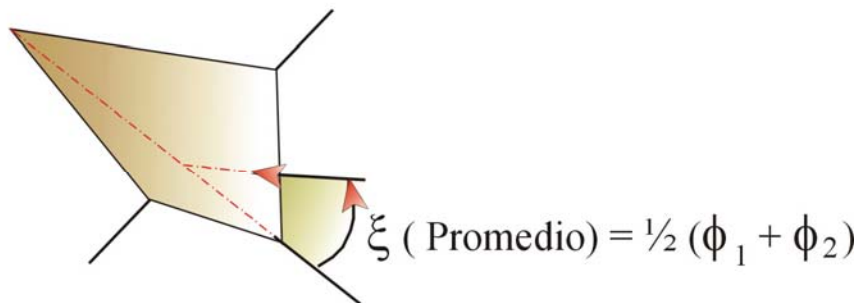
$$(FS)_a = \frac{FS + \bar{F} \sin\xi [\tan\phi_1 \cdot \cos\theta_2 + \tan\phi_2 \cdot \cos\theta_1]}{[1 - \bar{F} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos\xi]} \quad (3.62)$$

siendo el valor de \bar{F} como el indicado en la ecuación (3.41)

figura 3.10



Fuerza de anclaje en el plano vertical que contiene a la línea de intersección de los planos A y B ($F_h = 0$) y B ($F_a = 0$)



Optima dirección del anclaje según Hoek y Bray [2].

Al despejar \vec{F} de la fórmula anterior se tiene:

$$\vec{F} = \frac{\delta(FS)}{[a_1 \cos \xi + c_1 \sin \xi]} \quad (3.63)$$

siendo:

$$\delta(FS) = (FS)_a - (FS) \quad (3.64)$$

$$a_1 = (FS)_a \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.65)$$

$$c_1 = (\cos \theta_2 \cdot \tan \phi_1 + \cos \theta_1 \cdot \tan \phi_2) \quad (3.66)$$

Al comparar (3.65) y (3.66) con (3.44) y (3.46) puede apreciarse que $a_1 = a$ y $c_1 = -c$.

En otras palabras, todo lo expresado anteriormente equivale a considerar en la fórmula (3.41) que $\cos \eta = 0$ y $\cos \Omega = -\sin \varepsilon$, lográndose obtener exactamente la ecuación (3.63) previamente mencionada.

El mínimo valor de \vec{F} y por ende el de la fuerza de anclaje (F_a), se obtiene al tomar

en cuenta $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \xi} = 0$.

Es decir, la inclinación óptima toma la forma:

$$\tan \xi = \frac{a_1}{c_1} = \frac{[\cos \theta_2 \cdot \tan \phi_1 + \cos \theta_1 \cdot \tan \phi_2]}{(FS)_a \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.67)$$

Si en la ecuación (3.53) se substituye $\cos\Omega$ por $-\sin\xi$, lógicamente la misma solución es hallada para $\tan\xi$.

3.4.- APLICACION PRACTICA

Se desea estudiar la posibilidad de una rotura por cuña en un afloramiento constituido por una roca arenisca caracterizada por dos sistemas de discontinuidades los cuales presentan las siguientes orientaciones:

Plano	Rumbo	Buzamiento	Buzamiento/Dirección de Buzamiento	ϕ
			α_1/ψ_1	
A	N75E	40S	40°/165°	25°
			α_2/ψ_2	
B	N15E	70N	70°/285°	28°
Talud	N50W	65S	65°/220°	

La posible cuña deslizante tiene un peso $W \approx 217,00$ KN. Adicionalmente no se ha tomado en cuenta el efecto sísmico, es decir $K_x = 0$, $K_y = 0$ y $K=1$, por lo tanto $R=W$, y $\varepsilon = 0$

De acuerdo a la ecuación (3.9) el acimut de la línea de intersección ψ_2 es:

$$\tan \psi_s = \left[\frac{\tan 40^\circ \cdot \cos 165^\circ - \tan 70^\circ \cdot \cos 285^\circ}{\tan 70^\circ \cdot \sin 285^\circ - \tan 40^\circ \cdot \sin 165^\circ} \right] = 0,53$$

por cuanto $\tan \psi_s = \tan(\psi_s + 180^\circ)$, dos valores de ψ_s son posibles, $\psi_s \cong 28$ y $\psi_s \cong 208^\circ$.

Por supuesto se tomará el valor de ψ_s en el cual α_s es positivo.

Dicho ángulo corresponde a $\psi_s = 208^\circ$ es decir N62W siendo el ángulo α_s que forma con la horizontal la línea de intersección de acuerdo a la ecuación (3.12).

$$\tan \alpha_s = [\tan 70^\circ \cdot \cos(285^\circ - 208^\circ)] = 0,618$$

por lo tanto $\alpha_s = 32^\circ$ hacia el sur.

A través de (3.30) y (3.31) los valores de θ_1 y θ_2 son:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 \cong 64^\circ \\ \theta_2 \cong 23,71^\circ \end{array} \right\} \theta_1 + \theta_2 = 87,71^\circ$$

Por otro lado al utilizar (3.22) se determina el ángulo θ_{ab} , es decir:

$$\cos \theta_{ab} = \sin 40^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 120^\circ + \cos 40^\circ \cdot \cos 70^\circ = -0,04$$

$$\theta_{ab} = 92,30^\circ \quad \therefore (180 - \theta_{ab}) = 87,71^\circ$$

El factor de seguridad FS de acuerdo a (3.35) puede calcularse como sigue:

$$FS = \left[\frac{\cos 23,71^\circ \cdot \tan 25^\circ + \cos 61^\circ \cdot \tan 28^\circ}{\tan 32^\circ \cdot \sin 87,71^\circ} \right] = 1,097 \cong 1,10$$

Dicho valor concuerda perfectamente al utilizar el método gráfico propuesto por Hoek y Bray [2] en el cual $FS = A \cdot \tan \phi_1 + B \cdot \tan \phi_2$.

En otras palabras al comparar dicha expresión con (3.37), se obtiene que:

$$A = \frac{\cos \theta_2}{\tan \alpha_s \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} \Rightarrow A = 1,466$$

y

$$B = \frac{\cos \theta_1}{\tan \alpha_s \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)} \Rightarrow B = 0,702$$

Los valores de (A) y (B) determinados gráficamente según Hoek y Bray [2] son:

$$\left. \begin{array}{l} A = 1,5 \\ B = 0,7 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto el coeficiente de seguridad según dichos autores es: $FS = 1,5 \tan 25^\circ + 0,7 \cdot \tan 28^\circ = 1,07$.

Lógicamente el coeficiente de seguridad se encuentra cerca de la condición límite, lo que indica que la estabilidad del macizo rocoso es cuestionable, por lo que se desea determinar la mínima fuerza de anclaje y su orientación requerida para elevar el factor de seguridad a 1,5 es decir $(FS)_a = 1,5$.

En el caso particular que se considere el efecto de las fuerzas sísmicas con $K_x = 0,1$

y $K_y = 0,05$ se obtiene que $\varepsilon = 5,44^\circ$, $K = \sqrt{k_x^2 + (1 + k_y)^2} = 1,069$, por tanto

$R = W \cdot K = 232,00 \text{ KN}$.

Al reemplazar el valor de $\varepsilon = 5,44^\circ$ en la ecuación (3.35), se obtiene un coeficiente de seguridad $FS = 0,895$, es decir inestable.

Lo anterior demuestra que cuñas de roca aparentemente estables, fallan bajo la acción de las fuerzas sísmicas, hecho éste muy común durante la construcción de túneles y galerías, en donde el avance de la excavación se lleva a cabo mediante la técnica de voladuras. Esto confirma la importancia de aplicar anclajes como elemento de soporte, a objeto de garantizar la estabilidad del macizo rocoso.

a) Determinación de la mínima fuerza de anclaje - Caso general.

Al utilizar las ecuaciones (3.44) (3.45) y (3.46) se obtiene que:

$$a = \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (FS)_a = \sin 87,71^\circ \cdot 1,5 \cong 1,5$$

$$b = (\tan \phi_1 \cdot \sin \theta_2 - \tan \phi_2 \cdot \sin \theta_1) = \tan 25^\circ \cdot \sin 23,71^\circ - \tan 28^\circ \cdot \sin 64^\circ$$

$$b = - 0,29$$

$$c = -(\cos \theta_2 \cdot \tan \phi_1 + \cos \theta_1 \cdot \tan \phi_2) = -(\cos 23,71^\circ \cdot \tan 25^\circ + \cos 64^\circ \cdot \tan 28^\circ)$$

$$c = - 0,66$$

Así, al aplicar (3.58) resulta:

$$\cos \varepsilon = \left[\frac{1}{1 + (-0,44)^2 + (-0,193)^2} \right]^{1/2} = (0,812)^{1/2} = 0,9$$

$$\xi = 25,84^\circ$$

Al tomar en cuenta (3.53) y (3.55), se obtiene:

$$\cos \Omega = \left(\frac{c}{a} \right) \cos \xi = -0,396 \quad \therefore \quad \Omega \cong 113^\circ$$

y

$$\cos \eta = \left(\frac{b}{a} \right) \cos \xi = -0,174 \quad \therefore \quad \eta = 100^\circ$$

Al conocer los cosenos directores y sabiendo que:

$\delta(\vec{F}_S) = 1,5 - 1,1 = 0,4$ el valor de \vec{F} es según (3.43) es:

$$\vec{F} = \left[\frac{0,4}{1,5 \cdot 0,9 + 0,29 \cdot 0,174 + 0,66 \cdot 0,396} \right] = 0,24$$

Una vez conocido \vec{F} , α_s y $(\theta_1 + \theta_2)$ la mínima fuerza de anclaje F_a orientada a través de los ángulos ξ , Ω y η , se determina al aplicar la ecuación (3.41), es decir:

$$\left(\frac{F_a}{W}\right) = \vec{F} \sin \alpha_s \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0,24 \sin 32^\circ \cdot \sin 87,71^\circ$$

$$\left(\frac{F_a}{W}\right) = 0,127 \quad \therefore F_a = 27,56 \text{ KN} \cong 30,00 \text{ KN}$$

b) Obtención de la mínima fuerza de anclaje cuando actúa en un plano vertical.

El óptimo ángulo (ξ) requerido para alcanzar la mínima tensión de anclaje (F) con la línea de intersección (s), para el caso particular que dicha fuerza se encuentre actuando en el plano vertical (s, n), fácilmente se determina a través de la ecuación (3.67). Por lo tanto:

$$\tan \xi = \frac{\cos 23,71^\circ \cdot \tan 25^\circ + \cos 64^\circ \cdot \tan 28^\circ}{1,50 \cdot \sin 87,71^\circ}$$

$$\xi = 23,75^\circ$$

En función de lo indicado en el apartado (b), Hoek y Bray [2] estiman que una buena aproximación es considerar que la inclinación del tirante con la línea de intersección es $\xi = 1/2 (\phi_1 + \phi_2)$, es decir $\xi = 1/2(25^\circ + 28) = 26,5^\circ$. Valor bastante próximo con el obtenido al utilizar la ecuación (3.58). Para mayor detalle véase la figura 3.10b.

Al considerar (3.63) el valor de \vec{F} es:

$$\vec{F} = \frac{0,4}{1,5 \cdot \cos 23,75^\circ + 0,66 \cdot \sin 23,75^\circ} = 0,244$$

Se observa que el parámetro adimensional \vec{F} es prácticamente el mismo, al compararse con la solución del caso general ($\vec{F} = 0,24$).

A través de los resultados obtenidos, se puede apreciar que una buena aproximación es considerar que la fuerza de anclaje actúe en el plano vertical (s, n). Esta condición por supuesto simplifica notablemente el problema.

Adicionalmente, con el objeto de conocer las componentes de la fuerza de anclaje F_a referido al sistema de coordenadas (x, y, z), es decir norte, este y vertical, únicamente se requerir llevar a cabo la correspondiente rotación de ejes, aplicando la siguiente ecuación (véase figura 3.6).

$$(F_a)_{snh} = (F_a)_{xyz} (R)^T \quad (3.68)$$

donde:

$(F_a)_{snh}$ = vector fuerza del anclaje referido al sistema de coordenadas (s, n, h),
tensor de primer orden.

$(F_a)_{xyz}$ = vector fuerza del anclaje referido al sistema de coordenadas (x, y, z) es decir (norte, este, vertical).

$(R)^T$ = transpuesta de la matriz rotación

(R) = matriz rotación (la matriz de la transformación), tensor de segundo orden

$$(R) = \begin{pmatrix} \leftarrow & e_s & \rightarrow \\ \leftarrow & e_n & \rightarrow \\ \leftarrow & e_h & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Como es conocido previamente los vectores unitarios \vec{e}_s , \vec{e}_n y \vec{e}_h , pueden obtenerse a través de la ecuación (3.19) en función de α_s y ψ_s , es decir:

$$\vec{e}_s = -(\cos \alpha_s \cos \psi_s \vec{i} + \cos \alpha_s \sin \psi_s \vec{j} + \sin \alpha_s \vec{k})$$

$$\vec{e}_n = \sin \alpha_s \cos \psi_s \vec{i} + \sin \alpha_s \sin \psi_s \vec{j} - \cos \alpha_s \vec{k}$$

y

$$\vec{e}_h = \vec{e}_s \times \vec{e}_n = \sin \psi_s \vec{i} - \cos \psi_s \vec{j} + 0 \vec{k}$$

Tomando en cuenta que $\alpha_s = 32^\circ$ y $\psi_s = 208^\circ$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_s &= 0,7488\vec{i} + 0,3981\vec{j} - 0,5299\vec{k} \\ \vec{e}_n &= -0,4679\vec{i} - 0,2488\vec{j} - 0,8480\vec{k} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{e}_h = -0,4694\vec{i} + 0,8829\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(R) = \begin{bmatrix} 0,7488 & 0,3981 & -0,5299 \\ -0,4679 & -0,2488 & -0,8480 \\ -0,4694 & 0,8829 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R)^T = \begin{bmatrix} 0,7488 & -0,4679 & -0,4694 \\ 0,3981 & -0,2488 & 0,8829 \\ -0,5299 & -0,8480 & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar por (R) ambos lados de la ecuación (3.68), se obtiene:

$$(F_a)_{xyz} = (F_a)_{shn} (R)$$

$$(F_a)_{shn} = (F_a \cos \xi \quad F_a \cos \Omega \quad F_a \cos \eta)$$

$$F_a = 30,00 \text{ KN}, \quad \cos \xi = 0,9, \quad \cos \Omega = -0,396 \text{ y } \cos \eta = -0,174$$

$$(F_a)_{xyz} = (27,00 - 11,88 - 5,52) \begin{pmatrix} 0,74488 & 0,3981 & -0,5299 \\ -0,4679 & -0,2488 & -0,8480 \\ -0,4694 & 0,8829 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_x (\text{norte}) = 28,30 \text{ KN}$$

$$F_y (\text{este}) = 8,83 \text{ KN}$$

$$F_z (\text{vertical}) = -4,23 \text{ KN}$$

3.5.- DISEÑO PROPUESTO POR EL CANADA CENTER FOR MINERAL AND ENERGY TECHNOLOGY (CANMET), PARA DETERMINAR LA FUERZA DE ANCLAJE.

A continuación se describe un método simplificado recomendado por CANMET [6], con la finalidad de determinar la fuerza de anclaje requerida para garantizar la estabilidad de la cuña de roca.

El factor de seguridad en función de las fuerzas paralelas a OP (ver figuras 3.11 y 3.12) y considerando el criterio de rotura de Mohr-Coulomb, puede expresarse como sigue:

$$FS = \frac{(N_1 \cdot \tan \phi_1 + C_1 \cdot A_1) + (N_2 \cdot \tan \phi_2 + C_2 \cdot A_2 + F_0)}{W \cdot \sin \alpha_s} \quad (3.69)$$

siendo:

F_0 = componente tangencial paralela a OP de la fuerza horizontal F,

$$F_0 = F \cdot \cos \alpha_s.$$

Se aprecia que el resto de los parámetros involucrados en la ecuación (3.69), han sido definidos previamente.

De acuerdo a dicho Centro de Minerales y Energía el peso de la cuña W se obtiene mediante la fórmula:

$$W = \frac{\gamma H^3}{6} [\cot \alpha_s - \cot \beta]^2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \cdot \sin \alpha_s \quad (3.70)$$

Donde:

H = altura de la cuña

β = inclinación del talud

Siendo además las áreas A_1 y A_2 de los planos de discontinuidad A y B, como a continuación se describen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{H^2}{2} (\cot \alpha_s - \cot \beta) \sec \theta_1 \\ A_2 &= \frac{H^2}{2} (\cot \alpha_s - \cot \beta) \sec \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

Por otro lado, las resultantes de las presiones intersticiales U_1 y U_2 que actúan sobre los planos de discontinuidad A y B, son respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{A_1 \cdot H}{6} \gamma_w \\ U_2 &= \frac{A_2 \cdot H}{6} \gamma_w \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Las fórmulas indicadas en (3.72), corresponden a la condición extrema de saturación, con una altura de presión máxima de $H/2$, en la mitad de la línea de intersección (ver figura 3.11).

Igualmente se aprecia a través de la figura 3.13, conjuntamente con el procedimiento analítico descrito en el parágrafo (3.3) que las reacciones normales

N_1 y N_2 actuando sobre los planos de deslizamiento pueden obtenerse mediante las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{W \cos \alpha_s \cdot \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - U_1 + F_1 \\ N_2 &= \frac{W \cos \alpha_s \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - U_2 + F_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

siendo F_1 y F_2 , las componentes normales de la fuerza de anclaje F , actuando sobre los planos de discontinuidad A y B respectivamente (véase figura 3.14).

De acuerdo a la mencionada figura, resulta:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{F \sin \alpha_s \cdot \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ F_2 &= \frac{F \sin \alpha_s \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

En la dirección paralela a \overline{OP} se obtiene que $F_0 = F \cos \alpha_s$

figura 3.11 y 3.12

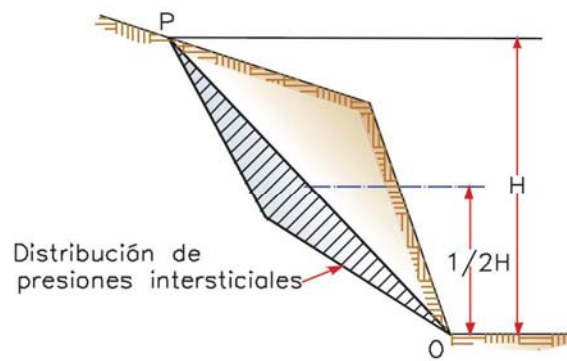
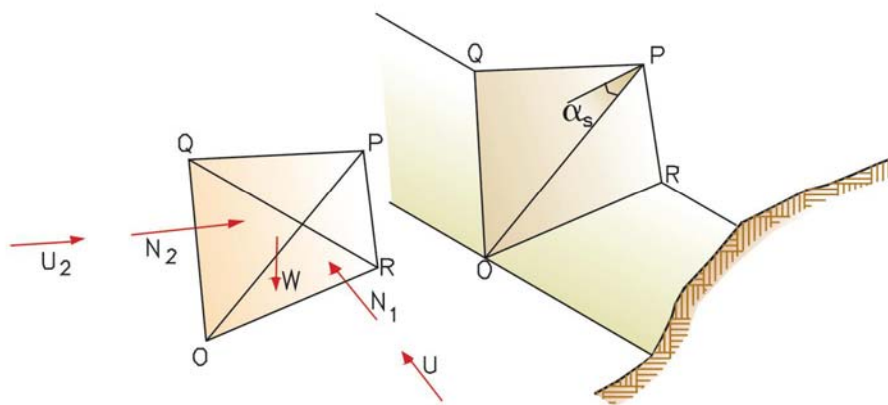
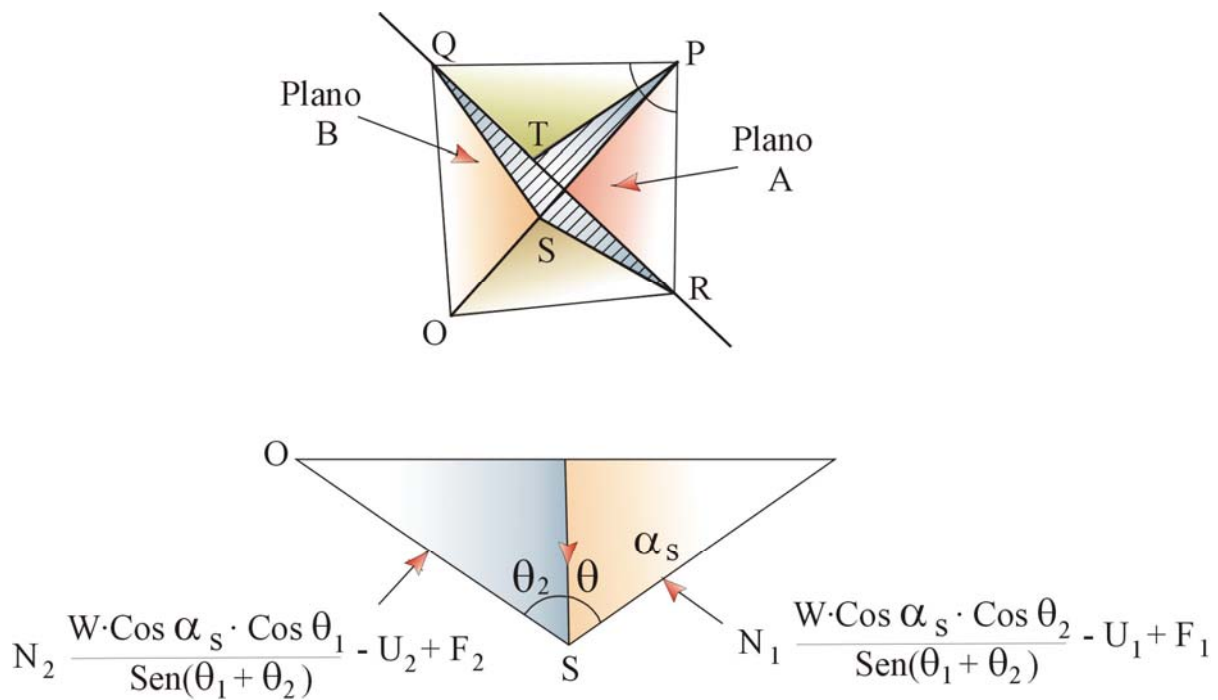


FIGURA 3.11 Distribución de presiones intersticiales a lo largo de la línea de intersección según Hoek y Bray [2]

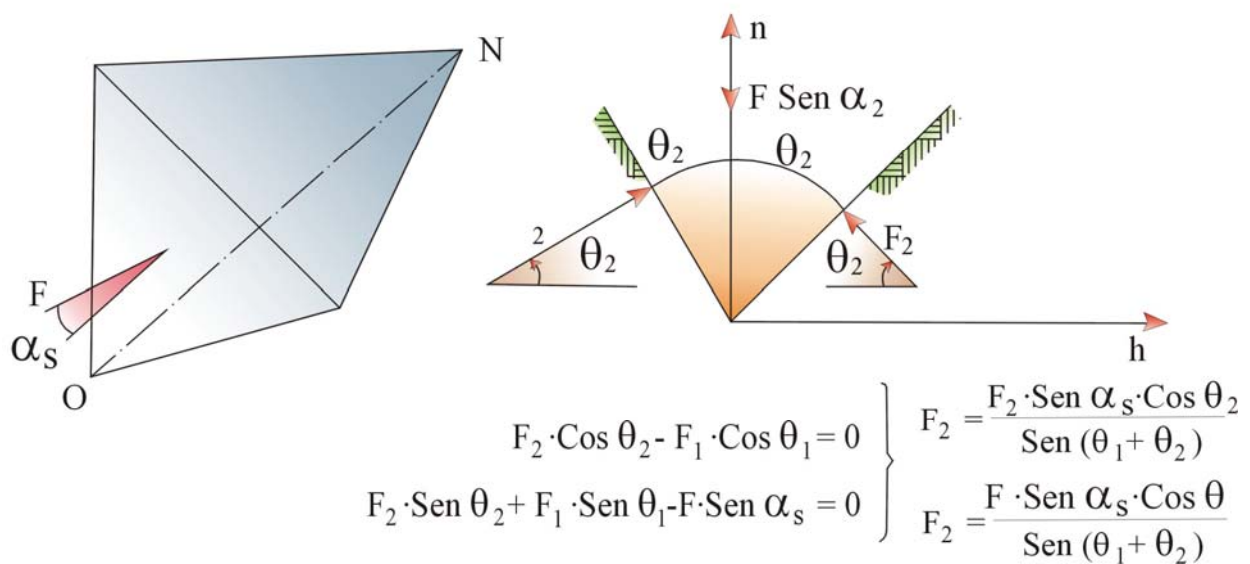


Rotura por cuña indicando las resultantes de las fuerzas debido al agua y las reacciones normales.

figura 3.13 y 3.14



Geometría de la cuña y fuerzas que actúan sobre los Planos de discontinuidad según Canmet [6].



Aplicación del soporte para estabilizar la cuña según Conmet [6].

3.5.1.- Aplicación Práctica del Método.

Con la finalidad de aclarar el procedimiento de cálculo, se resolverá el siguiente ejemplo propuesto por CANMET [6].

Plano	Buzamiento	Dirección de Buzamiento	C(KN/m ²)	ϕ
A	$\alpha_1 = 57^\circ$	$\psi_1 = 120^\circ$	$C_1 = 56,00$	$\phi_1 = 42^\circ$
B	$\alpha_2 = 60^\circ$	$\psi_2 = 50^\circ$	$C_2 = 35,00$	$\phi_2 = 40^\circ$
Talud	70°	90°		
$H = 25 \text{ m}, \quad \gamma = 27,30 \text{ KN/m}^3$				

El acimut de la línea de intersección ψ_s se obtiene a través de la ecuación (3.9), por tanto:

$$\tan \psi_s = \left(\frac{\tan 57^\circ \cos 120^\circ - \tan 60^\circ \cos 50^\circ}{\tan 60^\circ \sin 50^\circ - \tan 57^\circ \sin 120^\circ} \right)$$

$\psi_s = 89,80^\circ$ ó $(\psi_s + 180^\circ) = 269,80^\circ$. Se toma el ángulo que corresponde con un valor positivo de α_s .

Utilizando la fórmula (3.12), el ángulo de inclinación de la recta de intersección, cuya dirección es la dirección de deslizamiento, es:

$$\tan \alpha_s = [\tan 60^\circ \cos(50^\circ - 89,80)] = 1,33$$

$$\alpha_s = 53,06^\circ \text{ y } \psi_s = 89,80 (\cong 90^\circ)$$

Al tomar en cuenta las ecuaciones (3.30) y (3.31) los valores de θ_1 y θ_2 son:

$$\text{sen}\theta_1 = \text{sen}57^\circ \cdot \text{sen}53,06^\circ \cos(90^\circ - 120^\circ) + \cos57^\circ \cdot \cos53,06^\circ$$

$$\theta_1 = 65,20^\circ$$

$$\text{sen}\theta_2 = \text{sen}60^\circ \cdot \text{sen}53,06^\circ \cos(90^\circ - 50^\circ) + \cos60^\circ \cdot \cos53,06^\circ$$

$$\theta_2 = 56,17^\circ$$

$$(\theta_1 + \theta_2) = 121,37^\circ$$

El peso de la cuña, de acuerdo a la ecuación (3.70) es:

$$W = \frac{27,30 \frac{\text{Ton}}{m^3} (25,00)^3 m^3}{6} [\cot 53,06^\circ - \cot 70^\circ]^2 (\tan 65,20^\circ + \tan 56,17^\circ) \text{sen } 53,06^\circ$$

$$W = 31.268,00 \text{ KN}$$

Las áreas A_1 y A_2 de los planos de discontinuidad pueden obtenerse según (3.71), mediante las expresiones:

$$A_1 = \frac{(25,00)^2 m^2}{2} (\cot 53,06^\circ - \cot 70^\circ) \sec 65,20^\circ = 289,02 m^2$$

$$A_2 = \frac{(25,00)^2 m^2}{2} (\cot 53,06^\circ - \cot 70^\circ) \sec 56,17^\circ = 217,76 m^2$$

La resultante de las presiones intersticiales U_1 y U_2 para la condición más desfavorable se determina considerando que la altura máxima de presión es $H/2$, la cual actúa en la mitad de la línea de intersección. Por lo tanto de acuerdo a (3.72) resulta:

$$U_1 = \left(\frac{289,02m^2 \cdot 25,00m}{6} \right) \cdot 10,00KN / m^3 = 12.042,50KN$$

$$U_2 = \left(\frac{217,76m^2 \cdot 25,00m}{6} \right) \cdot 10,00KN / m^3 = 9.073,30KN$$

El valor de las reacciones N_1 y N_2 sin el refuerzo, al tomar en cuenta la ecuación (3.73), se obtienen como sigue:

$$N_1 = \left[\frac{31.268,00KN \cdot \cos 53,06^\circ \cdot \cos 56,17^\circ}{\sin 121,37^\circ} - 12.042,50KN \right]$$

$$N = 210,30 KN$$

$$N_2 = \left[\frac{31.268,00KN \cdot \cos 53,06^\circ \cdot \cos 61,20^\circ}{\sin 121,37^\circ} - 9.073,30KN \right]$$

$$N = 1.529,40 Ton$$

Bajo estas condiciones el coeficiente de seguridad FS, al no incluir en cuenta el soporte mediante anclajes, es según la expresión (3.69):

$$FS = \frac{(210,30KN.tan42^{\circ} + 56,00KN / m^2 .289,02m^2)}{31.268,00KN.sen 53,06^{\circ}} +$$

$$+ \frac{(1.529,40KN.tan40^{\circ} + 35,00KN / m^2 .217,76m^2)}{31.268,00KN.sen 53,06^{\circ}}$$

$$FS = 1,01$$

La magnitud del soporte requerida para elevar el factor de seguridad a 1,10, se determina mediante la ecuación (3.69), conjuntamente con las fuerzas F_1 y F_2 involucradas en la fórmula (3.73), por tanto:

$$1,1 [31.268,00 KN.sen53,06^{\circ}] = \{[(210,30 KN + F_1).tan42^{\circ} + 56,00KN/m^2.289,02 m^2$$

$$+ [(1.529,40 KN + F_2) tan40^{\circ} + 35,00 KN/m^2 .217,76 m^2] + Fcos53,06^{\circ}\}$$

$$27.490,50 KN = [16.374,50 KN + 0,90 F_1 + 8.904,92 KN + 0,84F_2 + 0,60F]$$

$$2.211,15 KN = 0,9 F_1 + 0,84 F_2 + 0,6 F$$

es decir:

$$F + 1,50 F_1 + 1,40 F_2 = 3.685,70 KN$$

Al reemplazar F_1 y F_2 de la ecuación (3.74) en la expresión anterior, se obtiene:

$$F + 1,50 \left[\frac{F \operatorname{sen} \alpha_s \cos \theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \right] + 1,40 \left[\frac{F \operatorname{sen} \alpha_s \cos \theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \right] = 3.685,25 \text{ KN}$$

Tomando en cuenta que $\alpha_s = 53,06^\circ$, $\theta_1 = 65,20^\circ$, $\theta_2 = 56,17^\circ$, $(\theta_1 + \theta_2) = 121,37^\circ$, resulta:

$$F + \frac{F \cdot \operatorname{sen} \alpha_s}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} (1,50 \cos \theta_2 + 1,40 \cos \theta_1) = 3.685,25 \text{ KN}$$

$$F + \frac{F \operatorname{sen} 53,60^\circ}{\operatorname{sen} 121,37^\circ} (1,50 \cdot \cos 56,17^\circ + 1,40 \cdot \cos 65,20^\circ) = 3.685,25 \text{ KN}$$

$$(F + 1,34 F) = 3.685,25 \text{ KN} \quad \therefore F \approx 1.575,00 \text{ KN}$$

Finalmente en base a la metodología recomendada por CANMET [6], se aprecian los siguientes aspectos de interés:

- 1.- La fuerza del anclaje F es horizontal, formando un ángulo α_s con la línea de intersección de las dos discontinuidades.

Igualmente, se aprecia que la mencionada fuerza se encuentra en un plano vertical, que a la vez contiene a la línea de intersección.

Lo anterior indica, que no se ha optimizado la orientación del anclaje, y por ende no se minimiza la fuerza del tirante, para un factor de seguridad constante.

- 2.- La definición de factor de seguridad descrita a través de la ecuación (3.69) corresponde al caso pasivo, por tanto $F = F_p$.
- 3.- La resultante de las expresiones intersticiales se determinan en función de las condiciones más desfavorables.

A pesar de las restricciones previamente indicadas, el análisis simplificado sugerido por el Centro de Minerales y Energía de Canadá, permite en una primera fase de cálculo una idea bastante aproximada de las condiciones de estabilidad de la cuña de roca investigada.

REFERENCIAS

- 1.- KOVARI, K. y FRITZ, P. (1977). "Stability Analysis of Rock Slopes for Plane and Wedge Failure with the Aid of a Programmable Pocket Calculator". Proceedigs Sixteenth Symposium on Rock Mechanics, University of Minnesota, pp 25-34.
- 2.- HOEK, E y BRAY, J. (1981). "Rock Slope Engineering", The Institution of Mining and Metallurgy, London, 358 p.
- 3.- The Pit Slope Manual, (1977). "Plane Shear Analysis" Supplement 5-1, Canada Centre for Minerals and Energy Technology (CANMET), 307 p.
- 4.- KOVARI, K. y FRITZ, P. (1975), "Cálculo de la Estabilidad de Taludes Rocosos en Dos y Tres Dimensiones", Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo, No. 120, Marzo-Abril, Madrid, pp 13-33.1
- 5.- Open Pit Course Notes, (1977), Part D, Vibration Effects on Slope Stability and Drgaline Operations, Department of Mining Engineering, Queen's University, Kingston, Canada pp 14-21.
- 6.- The Pit Slope Manual (1977), "Mechanical Support", Chapter 6, Canada Centre for Minerals and Energy Technology (CANMET), 111 p.