

## **UNA METODOLOGÍA RECENTE PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA AL CORTE EN MACIZOS ROCOSOS**

**Roberto Ucar Navarro,Ph.D  
Profesor Facultad de Ingeniería  
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela**

### **RESUMEN**

En el presente trabajo se ha desarrollado una expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos al utilizar el criterio empírico de rotura desarrollado por Murrel y expresado posteriormente en forma adimensional por Bieniawski, en el cual los esfuerzos principales en el instante de la falla están vinculados a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1$$

Siendo  $\sigma_c$  la resistencia a la compresión simple de la roca intacta y los parámetros A y K, constantes que dependen de las características geomecánicas de la roca.

En estas condiciones, al aplicar esta nueva hipótesis, conjuntamente con los conceptos matemáticos básicos sobre contactos de curvas para obtener la

envolvente de una familia de círculos de falla, se ha determinado la resistencia al corte, tal que  $\tau_\alpha = \xi(\sigma_\alpha, \sigma_c, K, A)$ , en donde  $\sigma_\alpha = \sigma_n$  es el esfuerzo normal sobre el plano de rotura.

Una expresión de este tipo ayudará sin lugar a dudas a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a la estabilidad de taludes y obras subterráneas, en el diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, en la estimación de la resistencia por el fuste en roca de calidad pobre siendo el tipo de cimentación por medio de pilotes, así como la carga de hundimiento de una cimentación en terrenos diaclasados , y otras innumerables aplicaciones dentro del campo de la geotecnia.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años un gran esfuerzo se ha realizado en el campo de la ingeniería geotécnica con el objeto de poder determinar con mayor precisión la resistencia al corte de la roca tanto en la condición sana como fracturada.

Como es bien conocido una gran cantidad de intentos se han publicado para definir un criterio teórico que permita predecir la rotura del macizo rocoso, desde que en 1773 Coulomb postulara la primera hipótesis de falla.

La causa fundamental de que ninguno de los criterios existentes haya tenido una utilización universal radica en el hecho de que son muchos los parámetros que gobiernan el proceso de rotura de la roca, factores estos que dependen tanto del propio macizo rocoso como del estado tensional.

Para ello se han desarrollado algunos criterios empíricos que, aunque no poseen el esperado fundamento científico, ofrecen la gran ventaja de acercarse a la realidad del fenómeno físico.

De esta forma Bieniawski [1], utilizando los resultados de los ensayos realizados en la división de geomecánica del CSIR (Council for Scientific and Industrial Research) de Sudáfrica propone utilizar el criterio desarrollado por Murrel [2] y lo expresa en forma adimensional.

En base a lo antes dicho se analiza en detalle en este trabajo la solución exacta al considerar el criterio de falla modificado por Bieniawski [1] para calcular la envolvente de rotura por cizallamiento, la cual proporcione una base adecuada para estimar las tensiones tangenciales tanto en roca intacta como en aquella que exhiba diferentes planos de discontinuidad ; con la finalidad de poder resolver gran

variedad de problemas que habitualmente se encuentran en el área de la mecánica de las rocas a través de las diferentes obras civiles y mineras.

## 2. DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CORTE

En el año 1974, en el Journal of the South Institute of Mining and Metallurgy, el profesor Z.T. Bieniawski [1] publica los resultados obtenidos a través de una serie de ensayos realizados en macizos rocosos, al aplicar el criterio de rotura propuesto por Murrell [2], en la cual la relación entre los esfuerzos principales viene expresada como sigue:

$$\sigma_1 = F \cdot \sigma_3^K + \sigma_c \quad (1)$$

Donde:

$\sigma_1$  = esfuerzo principal mayor en la falla

$\sigma_3$  = esfuerzo principal menor en la falla

$\sigma_c$  = resistencia a la compresión simple de la roca intacta

F, K= constantes que dependen de las propiedades y características del macizo rocoso.

En forma adimensional tal como lo sugiere Bieniawski, la ecuación anterior se transforma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1 \quad (2)$$

La tabla No. 1 muestra los diferentes valores de A obtenidos por dicho investigador para roca intacta, mientras que K permanece constante para todo tipo de roca siendo su valor de 0,75.

De acuerdo a Ramamurthy [3], los valores de  $\sigma_c$  y A al tomar en cuenta en el macizo rocoso la presencia de los planos de discontinuidad y los diferentes niveles de meteorización, se obtienen en función de la bien conocida clasificación geomecánica (Rock Mass Rating– RMR), desarrollada por Bieniawski [4], mediante las ecuaciones:

$$(\sigma_c)_j = \sigma_c \exp \left[ \frac{RMR - 100}{18,75} \right] \quad \left. \right\} \quad (3)$$

$$A_j = A \exp \left[ \frac{RMR - 100}{75,5} \right] \quad \left. \right\} \quad (4)$$

$(\sigma_c)_j$  = resistencia a la compresión simple de la roca a través de los planos de fractura , la cual corresponde a una fracción de  $\sigma_c$ .

Se observa que para RMR = 100,  $(\sigma_c)_j = \sigma_c$  y  $A_j = A$

**Tabla No. 1 según Bieniawski [1]**

$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1$	$\therefore K = 0,75$
<b>Tipo de roca intacta</b>	<b>A</b>
Norita	5,0
Cuarcita	4,5
Limolita	4,0
Lodolita	3,0
Mayoría de las rocas	3,5

Para el caso particular que  $K = 1$ , la ecuación (2) está representada por una línea recta, y por ende la resistencia al corte es también lineal, obteniéndose la muy empleada envolvente de rotura de Mohr-Coulomb, en la cual el valor del parámetro A como se demostrará posteriormente corresponde a la bien conocida expresión:

$$A = \tan^2(45^\circ + \phi/2) = \left( \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \right) \quad (5)$$

Por otro lado al considerar la pendiente de la ecuación (2) se obtiene:

$$\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \quad (6)$$

Al tomar en cuenta que  $K < 1$  ( $K = 0,75$ ), es preferible expresar la ecuación anterior como a continuación se indica:

$$\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \begin{bmatrix} \\ \frac{K \cdot A}{\left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{1-K}} \\ \end{bmatrix} \quad (7)$$

A través de dicha fórmula se puede apreciar de inmediato que para el caso particular en el cual:

$$\left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) \rightarrow \infty \quad (8)$$

Es decir, la curva es normal al eje de las abscisas en el origen. Al mismo tiempo indica que el esfuerzo principal menor no puede existir en la rama de esfuerzos negativos o de tracción, lo que sin lugar a dudas es una limitación de este criterio.

Utilizando las ecuaciones de equilibrio en un estado bidimensional y mediante la figura (1) se sabe que:

$$\left[ \sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (9)$$

Por cuanto  $\sigma_1 = \zeta(\sigma_3)$ , la ecuación (9) toma la forma.

$$f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) = 0 \quad (10)$$

Donde  $\sigma_\alpha = \sigma_n$  y  $\tau_\alpha$  representan el esfuerzo normal y tangencial sobre el plano de rotura respectivamente.

Por otra parte, si la familia de líneas planas  $f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) = 0$ , admite envolvente, las funciones  $\sigma_\alpha = \psi(\sigma_3)$  y  $\tau_\alpha = \phi(\sigma_3)$  que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

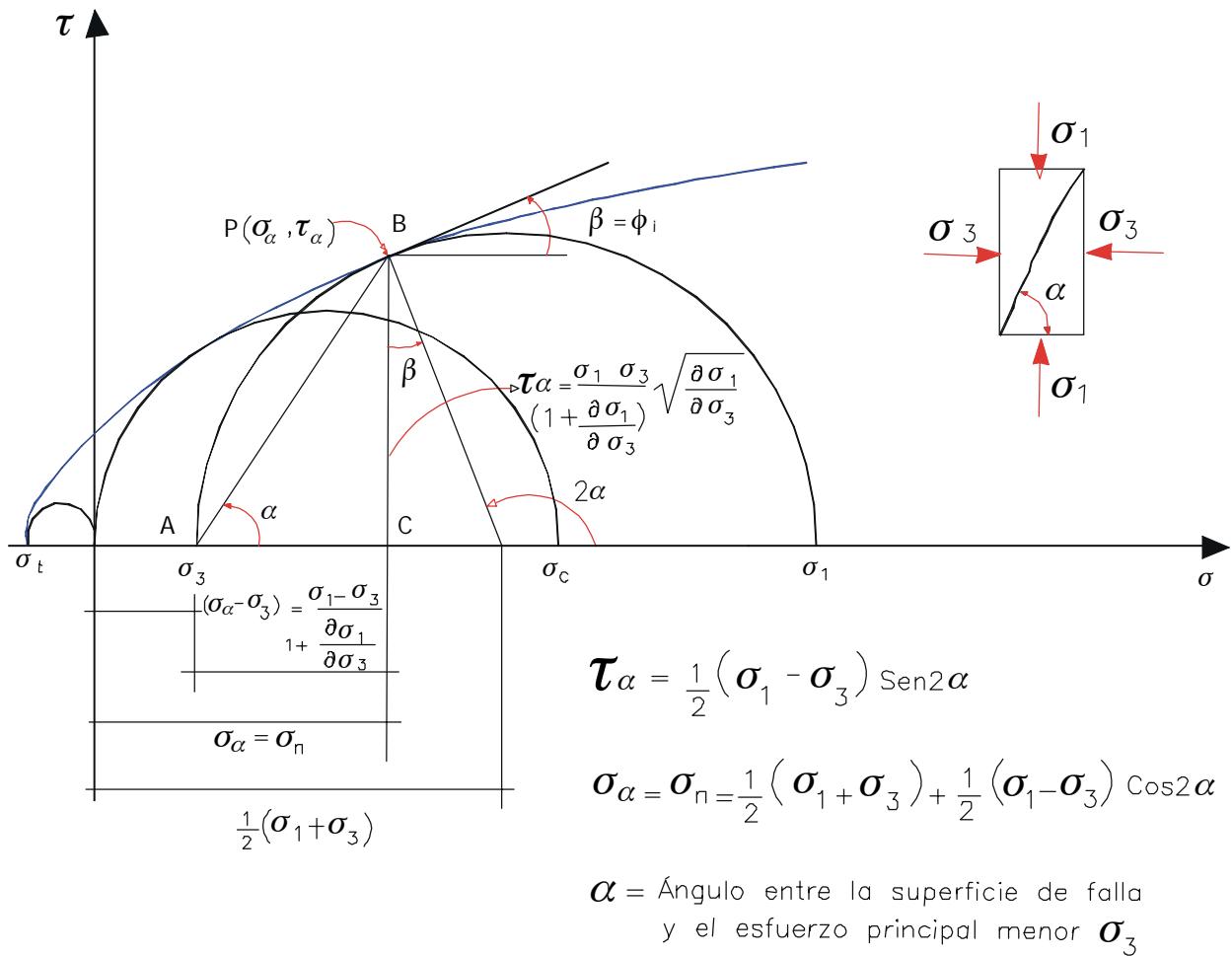


Figura 1. Envolvente de rotura por cizallamiento en macizos rocosos.

Despejando en (11) las coordenadas  $\sigma_\alpha$  y  $\tau_\alpha$  en función de  $\sigma_3$ , se obtienen las ecuaciones paramétricas que definen la envolvente.

Asimismo, en caso que sea posible, se puede proceder eliminando  $\sigma_3$  en las dos ecuaciones indicadas en (11), hallándose una relación de la forma  $F(\sigma_\alpha, \tau_\alpha) = 0$ , la cual representa también la envolvente.

Cabe destacar, que la familia de circunferencias de radio variable  $\sigma_3$ , representada a través de (9) reciben el nombre de involutas.

Tomando la derivada de  $\sigma_1$  con respecto a  $\sigma_3$  en ambos lados de la ecuación (9) queda:

$$2\left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3} + 1\right)\right] = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3} - 1\right) \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3} - 1\right)\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3} + 1\right)\left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right] = 0 \quad (13)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_\alpha = \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)} \quad (14)$$

Reemplazando (14) en (9) y despejando  $\tau_\alpha$ , se obtiene:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)} \sqrt{\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}} \quad (15)$$

Al dividir (15) entre (14), es posible escribir:

$$\frac{\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)^{1/2} \quad \therefore \quad \tau_\alpha = (\sigma_\alpha - \sigma_3) \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)^{1/2} \quad (16)$$

Por otro lado al observar el triángulo ABC de la figura (1), el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)^{1/2} \quad (17)$$

Al sustituir (7) en (17) la ecuación anterior se transforma:

$$\tan \alpha = \left[ \frac{K \cdot A}{\left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{1-K}} \right]^{1/2} \quad (18)$$

Igualmente, al observar la figura (1), se aprecia que el ángulo que forma el plano de falla  $\alpha$  con el esfuerzo principal menor y la inclinación de la envolvente de falla  $\beta$ , están relacionados a través de la expresión:

$$2\alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (19)$$

es decir:

$$\tan \beta \cdot \tan 2\alpha = -1 \quad (20)$$

Cabe destacar, que  $\beta$  se conoce también como el ángulo de fricción interna instantáneo.

A la vez utilizando (20), la pendiente de la envolvente puede determinarse como sigue:

$$\left( \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \left( \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \right) \quad (21)$$

$$\left( \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \frac{\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{-1}}{2 \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2}} = \tau' \alpha \quad (22)$$

Llamando  $\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \sigma'_1$ , queda por tanto:

$$\tau' \alpha = \frac{\sigma'_1 - 1}{2(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (23)$$

La cual se transforma:

$$\sigma'_1 - 2\tau' \alpha \cdot (\sigma'_1)^{1/2} - 1 = 0 \quad (24)$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau' \alpha + [1 + (\tau' \alpha)^2]^{1/2} \quad (25)$$

Despejando  $\sigma_\alpha = \sigma_n$  en (13), se tiene:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 + \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1 + 1} \right] \quad (26)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \cdot \sigma'_1}{1 + \sigma'_1} \quad (27)$$

Al despejar el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  de la ecuación (15) se obtiene:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (28)$$

Reemplazando dicho valor en (27), queda:

$$\sigma_\alpha (1 + \sigma'_1) = \sigma_1 + \sigma'_1 \left[ \sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \right] \quad (29)$$

Al despejar  $\sigma_1$  de la ecuación anterior , es posible escribir :

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha (\sigma'_1)^{1/2} \quad (30)$$

Sustituyendo (19) en (24) se obtiene :

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \left[ \tau' \alpha + \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \right] \quad (31)$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau' \alpha + \tau_\alpha \cdot \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \quad (32)$$

Igualmente, el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  puede expresarse:

$$\sigma_3 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau' \alpha - \tau_\alpha \cdot \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \quad (33)$$

Siendo la diferencia entre los esfuerzos principales:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \tau_\alpha \cdot \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \quad (34)$$

Elevando (25) al cuadrado:

$$\sigma'_1 = (\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \left[ 1 + (\tau'_\alpha)^2 \right]^{1/2} + \left[ 1 + (\tau'_\alpha)^2 \right] \quad (35)$$

Así:

$$\sigma'_1 = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \left[ 1 + (\tau'_\alpha)^2 \right]^{1/2} \quad (36)$$

Al reemplazar el valor de la pendiente  $\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$  indicado a través de la ecuación (6)

resulta :

$$K A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \left[ 1 + (\tau'_\alpha)^2 \right]^{1/2} \quad (37)$$

Igualmente al sustituir  $\sigma'_1 = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$  en (27), dicha ecuación se transforma como

sigue:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) + \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \left[ K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \right]}{\frac{1}{\sigma_c} \left[ 1 + K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \right]} \quad (38)$$

Tomando en cuenta que  $\sigma_1/\sigma_c = (A \cdot \sigma_3^K + 1)$ , la ecuación anterior puede expresarse como una función de  $\sigma_3$ , es decir:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left[ A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K \cdot (1+K)+1 \right] \cdot \sigma_c}{\left[ 1 + K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \right]} \quad (39)$$

Por otro lado,  $A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) - 1$ , siendo entonces el esfuerzo normal  $\sigma_n = \sigma_\alpha$

sobre el plano de fractura como a continuación se indica:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) - 1 \right] (1 + K) + 1 \right\} \sigma_c}{\left[ 1 + K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \right]} \quad (40)$$

Por otra parte, al utilizar la ecuación (31) que vincula el esfuerzo principal mayor

$\sigma_1 = f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \tau' \alpha)$  y expresándola en forma adimensional, resulta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} \left[ \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau' \alpha + \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \right] \quad (41)$$

Finalmente el reemplazar las ecuaciones (37) y (41) en (40), queda:

$$\sigma_\alpha = \frac{\left\{ (1 + K) \left[ \frac{1}{\sigma_c} \left( \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau' \alpha \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \right) \right] - K \right\} \sigma_c}{1 + \left[ 1 + 2 \tau' \alpha^2 + 2 \tau' \alpha \left( 1 + \tau' \alpha^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (42)$$

La ecuación diferencial indicada en (42) por simple comodidad se expresará en la forma siguiente:

$$x = \frac{\left\{ (1+K) \left[ \frac{1}{\sigma_c} \left( x + y \cdot y' + y \left( 1+y'^2 \right)^{1/2} \right) \right] - K \right\} \sigma_c}{1 + \left[ 1 + 2y'^2 + 2y' \left( 1+y'^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (43)$$

Siendo por tanto,  $x = \sigma_\alpha$ ,  $y = \tau_\alpha$ , e  $y' = \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} = \left( \frac{dy}{dx} \right)$

En forma adimensional:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right), \quad \bar{y} = \left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) \\ \text{Igualmente,} \quad \bar{y}' &= y' = \left( \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right) = \left( \frac{dy}{dx} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

En estas condiciones la ecuación (43) se transforma:

$$\bar{x} = \frac{\left( \frac{1+K}{2} \right) \left[ \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y}' + y \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2} \right] - \frac{K}{2}}{1 + \bar{y}'^2 + \bar{y}' \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2}} \quad (45)$$

Llamando:

$$\left( \frac{1+K}{2} \right) = K_1 \quad (46)$$

y

$$\frac{K}{2} = K_2 \quad (47)$$

Así, al reemplazar (46) y (47) en (45) se tiene:

$$\bar{x} = \frac{K_1 \left[ \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y}' + \bar{y} \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2} \right] - K_2}{1 + \bar{y}'^2 + \bar{y}' \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2}} \quad (48)$$

La ecuación anterior puede transformarse mediante simplificaciones como sigue:

$$K_1 \bar{y} = \bar{x} \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2} + \left( K_1 \bar{x} - K_2 \right) \left[ \bar{y}' - \left( 1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2} \right] \quad (49)$$

Dicha expresión se conoce como la ecuación de Lagrange y puede considerarse como una generalización de la de Clairent.

Es decir, la fórmula anterior corresponde al tipo [5]:

$$\bar{y} = \bar{x} \xi(\bar{x}) + \psi(\bar{y}') \quad (50)$$

## 2.1. Determinación de la Envolvente de Falla cuando $K = 1$ (Ecuación de Mohr-Coulomb)

Tomando en cuenta que la pendiente  $y = \tan\beta$ , la ecuación (49) se transforma:

$$K_1 \bar{y} = \bar{x} \sec \beta + (K_1 \bar{x} - K_2)(\tan \beta - \sec \beta) \quad (51)$$

Cuando  $K = 1$ ,  $K_1 = 1$  y  $K_2 = \frac{1}{2}$ , se obtiene :

$$\bar{y} = \bar{x} \sec \beta + \left( \bar{x} - \frac{1}{2} \right) (\tan \beta - \sec \beta) \quad (52)$$

Al simplificar queda:

$$\bar{y} = \bar{x} \tan \beta + \frac{1}{2} (\sec \beta - \tan \beta) \quad (53)$$

$$\bar{y} = \bar{x} \tan \beta + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} \right) \quad (54)$$

Considerando que  $\bar{y} = \left( \frac{y}{\sigma_c} \right)$  y  $\bar{x} = \left( \frac{x}{\sigma_c} \right)$ , resulta :

$$y = x \tan \beta + \frac{\sigma_c}{2} \left( \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} \right) \quad (55)$$

También se conoce que  $y = \tau_\alpha$  y  $x = \sigma_\alpha$ , si además  $\beta = \phi$  (inclinación de la envolvente de falla, la cual es constante), se obtiene finalmente:

$$\tau_\alpha = \sigma_\alpha \tan \phi + \frac{\sigma_c}{2} \left( \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} \right) \quad (56)$$

Por otra parte, se observa que  $\frac{\sigma_c}{2} \left( \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} \right)$  corresponde al intercepto de la envolvente lineal de falla y se define como el valor de la resistencia al corte a cero esfuerzo normal, y como es bien conocido representa la cohesión ( $C$ ) del suelo o macizo rocoso, por lo tanto:

$$C = \frac{\sigma_c}{2} \left( \frac{1 - \sin\phi}{\cos\phi} \right) \quad (57)$$

Cabe destacar que para el caso particular en el cual  $K = 1$ , la relación entre los esfuerzos principales es lineal, y de acuerdo a la ecuación (2), se transforma en la ecuación de la recta :

$$\sigma_1 = A \cdot \sigma_3 + \sigma_c \quad (58)$$

Por otra parte, es oportuno mencionar que  $\tau_\alpha$  está relacionado linealmente con  $\sigma_\alpha$ , siempre y cuando  $\sigma_1$  dependa linealmente de  $\sigma_3$ .

En estas condiciones, el próximo paso es determinar el parámetro  $A$ , indicado en la ecuación (58). Así, tomando en cuenta que  $K = 1$  y  $\tau'_\alpha = \left( \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = y' = \tan\beta$  la ecuación (37) se transforma como sigue:

$$A = 1 + 2 \tan^2\beta + 2 \tan\beta \cdot \sec\beta \quad (59)$$

Mediante transformaciones trigonométricas se obtiene:

$$A = \frac{\cos^2 \beta + 2\sin^2 \beta + 2\sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1 + \sin^2 \beta + 2\sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{(1 + \sin \beta)}{\cos^2 \beta} \quad (60)$$

Por tanto:

$$A = \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = N_\phi \quad (61)$$

Si  $\beta = \phi$  ( ángulo de fricción interna instantáneo ), resulta finalmente la conocida expresión:

$$A = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (62)$$

## 2.2. Determinación de la Envolvente de Falla cuando $K \neq 1$

Como previamente se ha mencionado la envolvente de falla  $\bar{y} = \left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right)$  se

determina al hallar la solución analítica de la ecuación diferencial indicada en (49), y que corresponde a la forma:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = 0 \quad (63)$$

Un camino fácil de obtener  $\bar{y}$ , corresponde en el caso que la ecuación (49), tenga solución singular, lo que implicaría cumplir con las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \bar{y}' = 0 \end{array} \right\} \quad (64)$$

Desafortunadamente la condición expresada a través de (64) no se cumple.

La solución de la ecuación (49) puede hallarse tal como lo indica Elsgoltz [6], al derivar dicha ecuación con respecto a  $\bar{x}$ , y haciendo  $\bar{y}' = \tan \beta$ , obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} K_1 \bar{y}' &= \sec \beta + \bar{x} \sec \beta \tan \beta \left( \frac{d\beta}{d\bar{x}} \right) + K_1 (\tan \beta - \sec \beta) + \\ &(K_1 \bar{x} - K_2) (\sec^2 \beta - \sec \beta \cdot \tan \beta) \left( \frac{d\beta}{d\bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

Al simplificar queda:

$$\left( \frac{d\bar{x}}{d\beta} \right) + \bar{x} \left[ \tan \beta - \left( \frac{K_1}{K_1 - 1} \right) \sec \beta \right] = - \left( \frac{K_2}{K_1 - 1} \right) (\sec \beta - \tan \beta) \quad (66)$$

Es decir:

$$\left( \frac{d\bar{x}}{d\beta} \right) + \bar{x} p(\beta) + f(\beta) = 0 \quad (67)$$

Siendo la solución de Mataix [5]

$$\bar{x} = e^{- \int p(\beta) d\beta} \left[ K_3 - \int e^{\int p(\beta)} \cdot f(\beta) d\beta \right] \quad (68)$$

Por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} p(\beta) &= \left[ \tan \beta - \left( \frac{K_1}{K_1 - 1} \right) \sec \beta \right] \\ f(\beta) &= \left( \frac{K_2}{K_1 - 1} \right) (\sec \beta - \tan \beta) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

En donde  $K_3$  es una constante de integración, y las constantes  $K_1$  y  $K_2$  previamente definidas a través de (46) y (47).

La solución de la ecuación (68) para  $K = \frac{3}{4}$  , una vez realizado el proceso de integración es el siguiente:

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \bar{x} = \cos \beta \tan^7 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \left[ K_3 + \frac{4 - 3 \cos^2 \beta}{(1 - \sin \beta)^3} \right] \quad (70)$$

Por otra parte ,la constante de integración puede calcularse considerando en (37) que  $\tau' \alpha = y = \tan \beta$  , así:

$$K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 + 2 \tan^2 \beta + 2 \tan \beta \cdot \sec \beta = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \quad (71)$$

Si la inclinación de la envolvente de falla  $\beta = 0$  (es decir  $\alpha = \pi/4 + \beta/2 = 45^\circ$ ) la ecuación anterior toma la forma :

$$K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 \quad (72)$$

A través de dicha expresión puede escribirse que :

$$\left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K = \left( \frac{1}{K \cdot A} \right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (73)$$

Al sustituir (72) y (73) se obtiene para  $\sigma_\alpha/\sigma_c$  la siguiente ecuación:

$$\bar{x} = \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{\left\{ A \left( \frac{1}{K \cdot A} \right)^{\frac{K}{K-1}} \cdot (1+K)+1 \right\}}{2} \quad (74)$$

Por lo tanto, para  $K = 0,75$  y  $A = 3, A = 4$  y  $A = 5$ , se obtiene:

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} \approx 30 \quad \therefore \quad A = 3$$

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} \approx 95 \quad \therefore \quad A = 4$$

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} \approx 231 \quad \therefore \quad A = 5$$

Finalmente, la constante de integración  $K_3$  se determina a través de (70), al considerar la condición particular en la cual  $\beta = 0$  y el valor de  $(\sigma_\alpha/\sigma_c)_{\beta=0}$ , resultando:

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} = (K_3 + 1) \quad (75)$$

$$K_3 = 29 \quad \therefore \quad A = 3$$

$$K_2 = 94 \quad \therefore \quad A = 4$$

$$K_1 = 230 \quad \therefore \quad A = 5$$

Una vez conocida dicha constante, el valor de  $\bar{x} = \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)$  se determina fácilmente, el cual dependerá de  $\beta$ . A su vez, la inclinación de la envolvente de falla ( $\beta$ ) será una función del intervalo de esfuerzos  $(\sigma_1, \sigma_3)$ .

Bajo estas condiciones  $(\tau_\alpha/\sigma_c)$  se obtiene a través de (51), es decir:

$$\left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{K_1} \left[ \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) \sec \beta - \left( K_1 \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} - K_2 \right) \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \right] \quad (76)$$

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Con la finalidad de apreciar la importancia de este nuevo método, se considerarán los siguientes ejemplos.

#### Ejemplo No. 1:

##### Datos:

$\alpha = 60^\circ$  (ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ )

$$\alpha = (45 + \beta/2) \quad \therefore \quad \beta = 30^\circ$$

Tipo de roca: Limolita  $A = 3$ ,  $K = 0,75$

Condición: Intacta (Ver tabla No. 1)

Cuando  $A = 3$ , la constante de integración  $K_3 = 29$ , por lo tanto a través de la ecuación (70) resulta:

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \bar{x} = \cos 30^\circ \tan^7 30^\circ \left[ 29 + \frac{4 - 3 \cos^2 30^\circ}{(1 - \sin 30^\circ)^3} \right]$$

$$\left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \bar{x} = 0,80$$

Tomando en cuenta que  $K = 0,75$ ,  $K_1 = (1 + K)/2 = 0,875$  y  $K_2 = K/2 = 3/8$ ,

conjuntamente con la ecuación (76) la resistencia al corte normalizada es:

$$\left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \bar{y} = 1,14 \left[ 0,8 \sec 30^\circ - \left( 0,875 \cdot 0,8 - \left( \frac{3}{8} \right) \right) \tan 30^\circ \right]$$

$$\left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = 0,84$$

Un aspecto muy importante sería comparar los valores de  $(\sigma_\alpha/\sigma_c)$  y  $(\tau_\alpha/\sigma_c)$  con los obtenidos al aplicar el criterio de rotura empírico de Hoek y Brown [7].

Al aplicar dicha hipótesis de falla, Ucar [8] ha determinado que:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{m}{8} \left[ \frac{1}{2 \sin^2 \beta} + \sin \beta \right] - \left( \frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \\ \bar{y} &= \left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{m}{8} \left( \frac{1 - \sin \beta}{\tan \beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Siendo (m) y (s) constantes que depende de las características de la roca.

Los valores de los parámetros (m) y (s) para una roca limolita intacta son :

$m = 10$  y  $s = 1$  (ver Hoek y Brown [7]). Por lo tanto para  $\beta = 30^\circ$ , resulta:

$$\bar{x} = \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{10}{8} \left[ \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 30^\circ} + \operatorname{sen} 30^\circ \right] - \left( \frac{30}{16} + \frac{1}{m} \right) = 1,15$$

$$y = \left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{10}{8} \left( \frac{1 - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{tan} 30^\circ} \right) = 1,08$$

Aquí es interesante indicar a través de este ejemplo en particular, que al equiparar el criterio propuesto por Bieniawski [1], la magnitud de la relación  $(\sigma_\alpha/\sigma_c)$  y

$\left( \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right)$  es aproximadamente un 70% y un 78% respectivamente con relación a los

valores obtenidos al aplicar el criterio empírico de rotura propuesto por Hoek y Brown [7].

Sin embargo, sería de gran importancia comparar la envolvente de falla para diferentes valores de A, y sus equivalentes de (m) y (s), con la finalidad de poder llegar a conclusiones bien fundamentadas entre ambas hipótesis de rotura.

**Ejemplo No. 2:**

En una excavación subterránea a la profundidad de 1.600,00 m, la presión vertical natural es  $\sigma_v = 57 \text{ MPa}$ , y la horizontal  $\sigma_h = 40 \text{ MPa}$ . Adicionalmente se conoce que  $A = 5$ ,  $K = 0,75$  y la resistencia a la compresión simple de la roca en la condición intacta es  $\sigma_c = 160 \text{ MPa}$ .

Se desea determinar el esfuerzo principal mayor en la rotura  $\sigma_1$  y la resistencia al cizallamiento, bajo la suposición que  $\sigma_h = \sigma_3$  (esfuerzo principal menor en la falla). A través de (71) se sabe que:

$$K \cdot A \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$3,75 (0,25)^{-0,25} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\beta = 43,06^\circ$$

$$\alpha = \left( 45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = 66,53^\circ$$

Al considerar (2) el esfuerzo principal en la rotura es:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1 = 5 \left(\frac{40}{160}\right)^{0,75} + 1 = 2,77$$

$$\sigma_1 = 2,77 \quad \sigma_c = 443,2 \text{ MPa}$$

El valor de  $(\sigma_\alpha/\sigma_c)$  mediante la ecuación (70) se determina como sigue:

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \cos 43,06^\circ \tan^7 (23,47^\circ) \left[ 230 + \frac{4 - 3 \cos^2 43,06^\circ}{(1 - \sin 43,06^\circ)^3} \right]$$

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = 0,648$$

Una forma de comprobar dicho valor es mediante la conocida ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \sin^2 \alpha \\ \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left( \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right) = 1,51 + 1,26 \cdot \cos 133,06 = 0,649$$

Valor que concuerda perfectamente con el de la ecuación anterior.

Finalmente, a través de (76) la resistencia al corte  $\tau_{\alpha}/\sigma_c$  se calcula como a continuación se indica:

$$\left( \frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{K_1} \left[ \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \sec \beta - \left( K_1 \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} - K_2 \right) \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \right]$$

En donde:

$$\left( \frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left( \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right) = 0,648$$

$$K_1 = \left( \frac{1+K}{2} \right) = 0,875$$

$$K_2 = \frac{K}{2} = \frac{3}{8} \quad , \quad \beta = 43,06^\circ$$

Resultando:

$$\left( \frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) = 0,92$$

Igualmente, otra forma de verificar dicho valor es a través de la ecuación:

$$\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] \operatorname{sen}(2\alpha) = 1/2(2,77 - 0,25) \operatorname{sen} 133,06^\circ = 0,92$$

Es decir , se obtiene igual resultado.

#### **4. CONCLUSIONES**

Utilizando la propuesta llevada a cabo por Bieniawski al expresar en forma adimensional el criterio de rotura presentado por Murrell, y tomando en cuenta al mismo tiempo el método analítico desarrollado en esta investigación para determinar la resistencia al corte en rocas, es lógico concluir que se desarrolla un nuevo campo de investigación al aplicar dicha envolvente de falla por cizallamiento.

A la vez , se podrán mejorar los métodos de cálculo en todo lo concerniente a la estabilidad de taludes, en el soporte de excavaciones subterráneas, además de mejorar los procedimientos para estimar la capacidad portante en roca de calidad pobre. Igualmente , en el diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, así como en otras muchas aplicaciones de interés geotécnico.

Por otra parte, se recomienda emplear esta nueva ecuación que gobierna la resistencia al corte en macizos rocosos , en lugar la bien conocida y empleada envolvente de falla de Mohr-Coulomb, la cual se ha estado utilizando en una forma

aproximada, a sabiendas que la verdadera curva de resistencia intrínseca no es lineal.

Finalmente, es importante destacar que la fórmula propuesta por Murrell, se asemeja bastante al criterio de rotura propuesta por Hobbs [9] para determinar la resistencia del hormigón , en el cual los parámetros obtenidos a través de ensayos triaxiales son  $A = 3,70$  y  $K = 0,86$ .

## SIMBOLOGIA

- A = constante ,  $3 \leq A \leq 5$  para la mayoría de las rocas
- A =  $\tan^2(45 + \phi/2)$  para el caso particular en el cual K = 1
- C = cohesión de la roca
- K = constante, K = 0,75 para la mayoría de las rocas
- $K_1 = (1 + K)/2$
- $K_2 = K/2$
- $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$  Constantes
- $K_3 =$  constante de integración
- m = constante que depende de las propiedades de la roca y controla la curvatura entre el esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  y el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  (Criterio de rotura de Hoek y Brown)
- RMR = clasificación geomecánica de Bieniawski
- s = constante que depende del tipo de roca  $1 \leq s \leq 0$  (Criterio de rotura de Hoek y Brown)
- $\bar{x} = \sigma_\alpha/\sigma_c$
- $\bar{y} = \tau_\alpha/\sigma_c = \sigma_n/\sigma_c$
- $\alpha =$  ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ .
- $\beta =$  ángulo que forma la tangente a la curva de resistencia intrínseca (envolvente de falla) con la horizontal, para un determinado intervalo de esfuerzos ( $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ )

- $\phi =$  ángulo de fricción interna de la roca  
 $\phi_j =$  ángulo de fricción interna de la roca medida en el plano de discontinuidad
- $\sigma_1 = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) =$  pendiente de la curva  $\sigma_1 = f(\sigma_3)$
- $\sigma_c =$  resistencia a la compresión simple (sin confinar) en roca intacta.
- $(\sigma_c)_j =$  resistencia a la compresión simple en la roca medida en el plano de discontinuidad
- $\sigma_h =$  presión horizontal
- $\sigma_v =$  presión vertical debido a la columna de roca
- $\sigma_\alpha = \sigma_n =$  esfuerzo normal actuando sobre el plano de falla
- $\tau_\alpha =$  resistencia al esfuerzo cortante
- $\tan \beta = \left( \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tau'_\alpha =$  pendiente de la envolvente de falla

## 5. REFERENCIAS

1. BIENIAWSKI, Z.T., Estimating the Strength of Rock Materials, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 74, number 8, March 1974, pp 312-320.
2. MURRELL, S.A., The Effect if Triaxial Stress System in the Strength Rock at Atmospheric Temperatures. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Volume 10, 1965, pp 231-281.
3. RAMAMURTHY, T., Stability of Rock Mass, Indian Geotechnical Journal, Vol. 16, No. 1, 74 páginas.
4. BIENIAWSKI, Z.T., Engineering Classification of Jointed Rock Masses. Trans. S. Afr. Inst. Civil Engrs, Vol 15, 1973 pp.
5. MATAIX, C. Análisis Algebraico e Infinitesimal, tomo II, Cálculo Integral, 1967, 375 páginas, Editorial Dossat, S.A.
6. ELGOSTS, L. Differential Equations and the Calculus of Variations, Mir Publishers, 1980, 440 páginas.
7. HOEK, E. y BROWN T., Empirical Strength Criterion for Rock Masses, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 106, No. GT9, Sept., 1980, pp 1013-1035.
8. UCAR, R., Determination of Shear Failure Envelope in Rock Masses, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 112, No. 3, March 1986, pp 303-315.
9. HOBBS, D.W., Y POMEROY, C.D., The Structural Engineer (London), V.52, No. 5, Mayo 1974, pp 151-165.