

## EJERCICIOS:

### I) Calcular la suma de las series:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

3)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

4)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1}{6}$

5)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n - 1}{4^n}$

6)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2}$

7)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{10}{3}$

8)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

9)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \frac{15}{2}$

10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

11)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} = \frac{-3}{2}$

12)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{25}{10^n} - \frac{6}{100^n} \right]$

13)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

14)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{4}$

15)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$

16)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

17)  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Ln} \left( \frac{n}{n+1} \right)$

18)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e}{\pi} \right)^n$

19)  $1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n} + \dots$

20)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{1-n}$

21)  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Ln} \left( \frac{n+1}{n} \right)$

22)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2 - 8n - 3}$

23)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{e} \right)^n$

### II) Estudiar la convergencia de las series:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ln}(n+1)}{(n+1)^3}$

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{4n+2}} \right)^{n^2+1}$

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \text{Ln}(n)}{n^3 + 2n - 1}$

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

6)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{Ln}(n)}{e^n}$

7)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( n \text{Sen} \left( \frac{1}{n} \right) \right)^{n^2}$

8)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\text{Ln}(n)]^k}$

9)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\text{Ln}(n)]^{5k-1}}$

10)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^{n^2}$

11)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + \text{Sen}(n)}{\sqrt[3]{n^4 + 1}}$

12)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - \text{Cos}(n)}{\sqrt[3]{5n^8 + 3n^2 + 1}}$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3n} \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^5+3}}$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^3}{(n+1)^{n+1} (n+2)^{n+3}} \quad 17) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n \operatorname{Ln}(n)} \quad 18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5}{4^n+n^2}$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+2n}{e^{2n}+n} \quad 20) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} \quad 21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

$$22) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n \operatorname{Ln}(n)} \quad 23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \quad 24) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$25) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n^2+2n} \quad 26) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n^2+n+1} \quad 27) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$$

$$28) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1}} \quad 29) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4))}{n! e^n (4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots (4n))} \quad 30) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{1}{|\operatorname{Sen}(n)|}\right)$$

$$31) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)} \quad 32) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}} \quad 33) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$$

$$34) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n[\operatorname{Ln}(n)]^n} \quad 35) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tag}\left(\frac{1}{n}\right) \quad 36) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-4n+5}{n^2+5n-3}\right)^{n^2-n+1}$$

$$37) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad 38) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \quad 39) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ArcSen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$40) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{Ln}(n) + \sqrt{\operatorname{Ln}^3(n)}} \quad 41) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ln}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$$

**III) Estudiar si la serie converge absolutamente, condicionalmente o si diverge:**

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}\right) \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\operatorname{Ln}(n)}} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7^n}{2^{3n}} \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)}{n\sqrt{n}} \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Ln}(n)}{n[\operatorname{Ln}^2(n)+1]}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{Ln}(n+1)}{n+1} \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+1}}\right)^{n^2+n+1}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctag\left(\frac{1}{2n+1}\right) \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^{2n}}{(2n-1)!} \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (n!)^2}{n^{(n+1)}(n+1)^{(n+2)}} \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3n+1}}{5n+3} \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n}}{n+1}$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots (2n+5)} \quad 17) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{Ln(n)} \quad 18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} Ln(n)}{n+1}$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5n^3 1}{3n^2 + 2} \quad 20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\sqrt{n}}} \quad 21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n(2^n + 1)}$$

$$22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + 3}{(2n-5)^2} \quad 23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^3} \quad 24) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 + 4^n}{1 + 3^n}$$

**IV) Encontrar el intervalo o dominio de convergencia:**

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n! \left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n (x-1)^n}{Ln(3n)} \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[Ln(n)]^x}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n+2}}{(n+1)} \cdot (x-2)^n \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n! (x-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n!} (x-2)^n$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n! (x-2)^n}{2^n (2n)!} \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n\sqrt{n}} \quad 9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{nLn n}$$

$$10) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{e^n (n+1) Ln^3 (n+1)} \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} \quad 12) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n+1) 3^n (x-1)^n}{(n+1)} \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} Ln(n) \cdot 2^n \cdot x^n}{3^n \cdot n^2} \quad 15) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n(x+1)^n}$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n(x+1)^n} \quad 17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ln x)^n}{n \cdot 2^n} \quad 18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ln x)^{n-1}}{n \cdot 3^n Ln(n)}$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \arcsen x)^n}{n \cdot \pi^n} \quad 20) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \quad 21) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1} (x-3)^n}{(2n+1)}$$

$$22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n)}{n+1} (x-5)^n \quad 23) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3n^2 + n}{3n^2 + 1} \right] (x-2)^n \quad 24) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (Ln x)^n}$$

$$\begin{array}{lll}
25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} & 26) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[Ln x]^n} & 27) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n+2}{n+1} \right) x \right]^n \\
28) \sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \frac{Ln(n)}{n[Ln^2(n)+1]} & 29) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{[n+1]^5 \cdot x^{2n}} & 30) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{[x-2]^n} \\
31) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} \cdot n^n} & 32) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-3)^{2n}}{(n+1)Ln(n+1)} & 33) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3n^2+n}{3n^2+1} \right]^{2n+1} (x-2)^{n^2} \\
34) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{[2n!]} (x+4)^n & 35) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n)}{e^n} (x-e)^n & 36) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n \\
37) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^n} \cdot x^{2n+1} & 38) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{x^n}{n!} & 39) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n!} \cdot (Ln x)^n \\
40) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n} \cdot Ln x^n & 41) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} &
\end{array}$$

#### V) Desarrollo en serie de potencias.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} & \text{converge para } |x| < \infty \\
\text{b) } \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{converge para } |x| < \infty \\
\text{c) } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{converge para } |x| < \infty \\
\text{d) } \operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\text{e) } Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} & \text{converge para } |x| < 1
\end{array}$$

#### f) Binomial

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^n}{n!}$$

Converge para  $|x| < 1$

**A) Desarrollar en serie de potencias de “x” y hallar su intervalo de convergencia:**

- 1)  $f(x) = x \cdot e^{-2x}$     2)  $f(x) = \operatorname{sen}x \cdot \cos x$     3)  $f(x) = \cos^2 x$     4)  $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$   
 5)  $f(x) = \operatorname{Ln}(2+x)$     6)  $f(x) = e^x \sqrt{1+x^2}$     7)  $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$     8)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 9)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$     10)  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}x$     11)  $f(x) = \cos x^2$     12)  $f(x) = \operatorname{sen}hx$   
 13)  $f(x) = x \cdot (1+2x)^{-2}$     14)  $f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$     15)  $f(x) = \frac{1}{x} \left[ 1 + \frac{1}{x} \operatorname{Ln} \left( \frac{1+x}{1+2x} \right)^2 \right]$

**B) Calcular usando series de potencias:**

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \operatorname{Ln} \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = 2$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arcsen}x}{\operatorname{sen}^3 x} = -\frac{1}{6}$   
 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{Arctg}x} = 1$     4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg}x - x}{x^2 \operatorname{Ln}(x+1)} = -\frac{1}{3}$   
 5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} = 2$     6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{\operatorname{Ln}(x+1) + \operatorname{sen}x}$   
 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsen}x - x}{\sqrt[3]{2x^2 + 8} - 2}$     8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} = \frac{4}{3}$   
 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\operatorname{Arctg}x} = \frac{1}{2}$     10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$   
 11)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 - x^2} \right)$     12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(1+x) - \operatorname{Arcsen}x}{x \cdot (e^x - 1)}$   
 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tag}x - \operatorname{sen}hx}{x^3} = \frac{1}{4}$     14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}x(2 + \cos x) - 3x + x^3 e^{-x^2}}{x^5}$   
 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{Arctg}x}{x^3 \operatorname{Ln}(x+1)} = \frac{1}{6}$     16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tag}x - \sec x}{x^3} = -\infty$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{senhx}}{(1 - \cosh x)^2} = +\infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 2 \operatorname{Artg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \left( \frac{12 - 5x^2}{12 - x^2} - \cosh x \right)$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2} \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

**C) Resolver las siguientes integrales:**

$$1) \int_0^x \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt$$

$$2) \int_0^t e^{-t^2} dt$$

$$3) \int_0^x \frac{\operatorname{Ln}(1+t)}{t} dt$$

$$4) \int_0^x \operatorname{Ln}(1+t^2) dt$$

$$5) \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$$

$$6) \int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t} dt$$

$$7) \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

$$8) \int_0^x e^{-t} \cos \sqrt{t} dt$$

**D) Aplicando desarrollos en series de potencias, encontrar el valor aproximado de: (con 3 cifras decimales).**

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} dx$$

$$3) \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = 0,621$$

$$4) \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx = 0,608$$

$$5) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

$$6) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x} dx$$

$$7) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3} dx = 0,508$$

$$8) \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = 0,189$$